Math. P.
217 g.

Math. P.
217 g

Hennig

Grundriß
der
Geometrie.

Für
Forstschulen und technische Gymnasien
bearbeitet
von

Karl Friedrich Hennig,
Professor der Mathematik in Schweinfurt.

Erster Theil.
Elementare, ebene Geometrie.

Mit 8 Steindrucktafeln.

Druck und Verlag von Carl Brügel in Ansbach.

Wd
122. A.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorwort.

Gegenwärtiger Grundriß der Geometrie soll, wie sich schon aus dem Titel erkennen läßt, kein umfassendes, vollständiges Lehrgebäude dieser Wissenschaft seyn, sondern vielmehr eine geordnete Reihe der wichtigsten und in ihrer Anwendung brauchbarsten Sätze, gegeben in solcher Zahl, daß sie leicht überschaut werden können, und in solcher Weise, daß sie nicht blos zur Entwickelung des Geistes wesentlich beitragen, sondern auch hohes Interesse für Mathematik sowohl, als für Wissenschaftlichkeit überhaupt erregen.

Es dürfte sich sonach dieses Büchlein sowohl zum Schulbuche als auch zum Privatgebrauche für Anfänger und Freunde dieser Wissenschaft eignen. Und wollte man damit noch Schliebens selbstlehrenden Feldmesser in Verbindung setzen, so möchte es wohl vorzüglich

für Forstschulen und technische Lehranstalten brauchbar erscheinen.

Meine Parallelentheorie habe ich, da dieselbe bisher noch keinen Widerspruch erlitten hat, hier wiederzugeben kein Bedenken getragen, die Euklidische Theorie jedoch, als die bekannteste, in einem Anhange beigefügt.

Was übrigens den zweiten Theil dieses Büchleins betrifft, so soll derselbe nur dann erscheinen, wenn für die Brauchbarkeit des ersten unzweideutige Stimmen sich entschieden haben werden.

Schließlich sey dem Verfasser nur noch erlaubt, auf einige Irrthümer aufmerksam zu machen, welche sich wegen Entfernung vom Druckorte, die ihm nur eine einzige Revision gestattete, eingeschlichen haben. So ist § 121 unmittelbar nach § 113 zu setzen und im § 134 Nr. 3 also zu lesen: Ein Dreieck in ein anderes von größerer oder kleinerer Höhe zu verwandeln. Einige kleinere Verstöße wird der gütige Leser wohl selbst sogleich zu verbessern wissen.

Schweinfurt, den 28. Februar 1838.

Der Verfasser.

Einleitung.

A.
Gegenstand der Geometrie.

Geometrie heißt Erdmeßkunde, welchen Namen diese Wissenschaft entweder deßhalb erhalten hat, weil ihre Wahrheiten sehr bald auf Vermessungen von Ländereien angewendet wurden, oder — was das Wahrscheinlichere ist — weil das Bedürfniß, Vermessungen bezeichneter Art vorzunehmen, zur Auffindung geometrischer Wahrheiten Veranlassung gab.

Der Gegenstand der Geometrie ist aber keineswegs etwa nur die Lehre, wie man sich bei Bestimmung der Größe von Feldern, Wiesen, Wäldern u. s. f. zu benehmen habe; denn

dieses gehört bereits zur Anwendung geometrischer Lehren auf bestimmte Fälle, zur sogenannten praktischen Geometrie oder Geodäsie, sondern sie lehrt uns vielmehr die verschiedenen Beziehungen räumlich ausgedehnter, (kontinuirlicher, stetiger) Größen und deren Verhältnisse in ihrer Allgemeinheit kennen.

Räumlich ausgedehnter Größen gibt es aber in der Wirklichkeit nur eine, nämlich den physischen Körper. Derselbe hat jedoch drei verschiedene Ausdehnungen, nämlich Länge, Breite und Dicke (Höhe oder Tiefe). Und nimmt man nun nur eine, oder zwei, oder alle drei Ausdehnungen desselben für sich in Betracht, so ergibt sich uns der Begriff der geometrischen Linie, Fläche und des geometrischen Körpers, welche drei dann als die Objekte der gesammten Geometrie, als stetige, räumlich ausgedehnte Größen angesehen werden.

Hieraus erhellet, mit welchem Rechte man behauptet, daß die geometrische Linie nur nach der Länge, die geometrische Fläche nur nach Länge und Breite, der geometrische Körper

hingegen nach allen drei Richtungen hin ausgedehnt sey.

Anmerk. Dem geometrischen Punkte, welcher keine Ausdehnung an einem physischen Körper repräsentirt, kann auch durchaus keine Ausdehnung zugeschrieben werden, sondern es dient derselbe vielmehr nur als Mittel, irgend eine Stelle in einem der erwähnten geometrischen Objekte bezeichnen zu können.

Aus dem Bisherigen geht hervor, daß die in der Geometrie zur Sprache gebrachten Gegenstände nicht mit dem leiblichen Auge, sondern einzig und allein mit dem Auge des Geistes angeschaut werden müssen, und daß demnach alle figürliche Darstellungen derselben nichts weiter, als höchst unvollkommene Bilder unserer geistigen Vorstellungen seyen. Mit anderen Worten:

Die Geometrie ist nichts Anderes, als eine geistige Anschauungslehre, und ihre Objekte sind nur von dieser Rücksicht aus zu beurtheilen.

Nach den drei verschiedenen räumlich ausgedehnten Größen, der Linie, Fläche und dem Körper, zerfällt die Geometrie selbst in drei Theile, die Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie.

Jeder dieser drei Hauptabschnitte theilt sich aber wiederum in einen elementaren und höheren.

Die elementare Longimetrie, welche zu ihrem Gegenstande die gerade Linie und unter den krummen die Kreislinie hat, wird gewöhnlich mit der Planimetrie verflochten vorgetragen.

B.

Geschichtliche Notizen.

Die ersten Sätze der Geometrie mögen vor allen anderen Völkern schon in den frühesten Zeiten bei den Aegyptern bekannt gewesen seyn. Zu dieser Behauptung berechtigen uns insbesondere jene großen Denkmäler der Baukunst, Kanäle, Obelisken, Pyramiden.

Von den Aegyptern kam diese Wissenschaft durch Thales zu den Griechen, wo sie mehr und mehr gepflegt, auf den Gipfel ihrer Höhe aber erst durch Euklid, Archimed und Apollonius von Perga gehoben worden ist.

Euklid, aus Sicilien oder Aegypten, lehrte 306 vor Christo zu Alexandria und trug in 15 Büchern, mit großer Deutlichkeit die Anfangsgründe der Mathematik vor, welche noch jetzt den Ruhm der Klarheit, Vollständigkeit und Gründlichkeit behaupten.

Die brauchbarsten Bearbeitungen dieser Anfangsgründe sind die von J. F. Lorenz, von Joh. Jos. Ign. Hoffmann und von E. S. Unger.

Archimed, ohngefähr 287 vor Christo zu Syrakus geboren, erwarb sich seinen größten Ruhm durch Auffindung des Verhältnisses zwischen Durchmesser und Umfang des Kreises, zwischen Kugel und Cylinder und durch Erfindung von Instrumenten, wodurch es den Syrakusern möglich wurde, ihre Stadt 3 Jahre lang gegen die Uebermacht der Römer zu vertheidigen.

Zu empfehlen ist eine deutsche Uebersetzung sämmtlicher Werke Archimeds von E. Nizze, mit 13 Steindrucktafeln, 4. Stralsund 1824.

Apollonius von Perga in Pamphilien, lebte zu Anfang des dritten Jahrhunderts vor

Christo und erlernte zu Alexandrien von den Schülern Euklids die Mathematik.

Sein vorzüglichstes Werk ist das über die Kegelschnitte in 8 Büchern, wovon aber nur 4 in der Urschrift erhalten sind. Das 5te, 6te und 7te haben wir in einer arabischen Uebersetzung, wornach J. Alf. Borelli dieselben ins Lateinische übertragen hat. Das 8te hat Edm. Halley nach den Inhaltsanzeigen in den Wahlsätzen des Pappus hergestellt.

Zwei andere Werke dieses großen Mathematikers *περὶ ἐπαφῶν*, de tactionibus und *ἐπίπεδοι τόποι*, ebene Oerter, sind nur verstümmelt auf uns gekommen.

Das Werk *περὶ διωρισμένης τομῆς*, de sectione determinata und die beiden Bücher *περὶ χωρίων ἀποτομῆς*, de sectione spatii sind verloren. Aber Pappus hat in seinen mathematischen Sammlungen den Inhalt derselben mit hinlänglicher Genauigkeit bezeichnet und die Hilfssätze, deren sich Apollonius bedient hat, mit genügender Vollständigkeit aufbewahrt, so daß Rob. Simson und W. A. Diesterweg beide Werke wieder herzustellen

im Stande gewesen sind. (s. Schöll's gr. Litteraturgeschichte).

Noch erwähnen wir zwei hieher gehörige Werke: Richter, (August), Porismen, nach Robert Simson bearbeitet und vermehrt, nebst den Lemmen des Pappus zu den Porismen des Euklides. 1837. Elbing. Neumann Hartmann. Paucher, Dr. Georg, geometrische Analysis, enthaltend: des Apollonius von Porga Sectio rationis, spatii und determinata 1837. Leipzig. Voß.

Die Römer, welche überhaupt ihre mathematischen Kenntnisse den Griechen zu verdanken haben, erlernten von ihnen insbesondere die Meßkunde, um dieselbe bei Aufführung ihrer Prachtgebäude in Anwendung zu bringen. Und so wurde denn bei ihnen hauptsächlich die Baukunst gepflegt, worin Marc. Vitruvius Pollio als Meister zu nennen ist. Sein Werk über die Baukunst in 10 Büchern, welches mit Ausnahme der Risse ganz auf uns gekommen ist, hat für den Architekten unschätzbaren Werth.

Vortrefflich zu nennen ist eine Uebersetzung des Vitruvius von A. Rode, 2 Bde. Leipz. 1796. gr. 4.

Die neuere Zeit hat, besonders bei uns Deutschen, eine solche Masse von geometrischen Schriften zu Tage gefördert, daß es eine schwere Aufgabe sein dürfte, jede derselben nach ihrem wahren Werthe zu klassifiziren. Wir erlauben uns daher nur die Namen einiger Geometer, deren Werke und Leistungen am bekanntesten sind, aufzuführen, ohne deßhalb über den Werth anderer, denselben Gegenstand betreffender Schriften, nur im mindesten aburtheilen zu wollen.

So nennen wir Euler, Kästner, Christian Wolf, Gauß, Bohnenberger, Brandes, Crelle, Ernst Gottfr. Fischer, Feuerbach, Grunert, Joh. Jak. Ign. Hoffmann, Klügel, Kries, Mollweide, Müller, Schulz, Schumacher, Steiner, Streit, Vieth, v. Zach, Zimmermann, Meier, Hirsch, Tobias Meyer, Umpfenbach rc.

Unter den Geometern des Auslandes haben sich besonders hervorgethan:

D'Alembert, Barrow, Bernoulli, de la Caille, Delambre, Descartes, Lacrix, Lambert, Legendre, Huygens, Newton etc.

C.

Geometrische Methode.

Bevor wie die einzelnen Wahrheiten der Geometrie selbst näher betrachten, haben wir uns mit der Methode des Vortrags der gesammten Mathematik, so insbesondere der Geometrie bekannt zu machen, um dadurch im Voraus über das Eigenthümliche ihrer Form zur Klarheit zu kommen.

Das ganze Gebäude der Geometrie, wie das der Mathematik überhaupt, wird in einer Reihe bestimmt bezeichneter Sätze aufgeführt.

Als Grundsteine dienen Grundsätze, Erklärungen und Forderungssätze; als übriges Material sind anzusehen Lehrsätze, Aufgaben, Zusätze, Folgerungssätze, welche letztere aber nur dann erst als giltig angesehen werden, entweder, wenn dieselben mit den Wahrheiten jener erstgenannten Sätze vollkommen übereinstimmen, oder wenn die Annahme des Gegentheils zu einem Widerspruche mit denselben führt.

So wie aber in allen übrigen Wissenschaf-

ten, so wird es wohl auch hier auf die Tüchtigkeit und Haltbarkeit des Fundaments ankommen, und wir haben daher die als Grundsteine bezeichneten Sätze etwas näher zu betrachten.

1. Grundsätze sind solche Sätze, deren Wahrheiten so einfach, so allgemein anerkannt sind, daß sie eines Beweises nicht ferner bedürfen, obgleich sie eines solchen fähig sind. Dieselben dürfen aber keineswegs stillschweigend vorausgesetzt und dann bei Gelegenheit in Anwendung gebracht werden; sondern sie müssen vielmehr bestimmt bezeichnet und als solche dem ganzen Gebäude der Geometrie vorangestellt werden.

2. Erklärungsätze haben den Zweck geometrische Begriffe im Leser oder Hörer zur höchstmöglichen Klarheit zu bringen, um dadurch jedem Mißverständnisse vorzubeugen. Alle Erklärungen sind aber entweder genetische oder Nominal-Erklärungen. Jene sind solche, in welchen die wesentlichen Merkmale eines Begriffs alle einzeln angegeben, die Entstehung desselben sonach selbst gezeigt wird; diese aber solche, in welchen die Merkmale nicht gesondert, sondern nur vereinigt dar-

gestellt werden, und wobei also die Entstehung des Begriffs selbst nicht angegeben ist. Die erstere Gattung von Erklärungen hat vollkommene Gültigkeit, die letztere aber nur dann, wenn durch eine nachfolgende Aufgabe die Entstehung des Begriffs gezeigt, oder, wenn die Erklärung des Begriffs, welche nicht durch Vereinigung von Merkmalen, sondern durch Anschauung gewonnen worden, sogleich denselben Begriff zur Anschauung bringt.

3. Forderungssätze. In diesen wird eine geometrische Construktion verlangt, deren Ausführung aber der Geometer nicht lehrt, sondern als bekannt, und von Jedem ausführbar, voraussetzt.

Auch solcher Sätze darf es nur wenige geben und es müssen dieselben als solche bestimmt bezeichnet werden.

Außer den drei erwähnten Gattungen von Sätzen, welche gleichsam das Fundament der gesammten Geometrie bilden, finden wir noch

4. Lehrsätze. In diesen werden Behauptungen ausgesprochen, welche man unmittelbar keineswegs als richtig anzuerkennen braucht, sondern deren Wahrheit vielmehr erst durch einen Beweis dargethan werden muß. — Der

Beweis wird aber entweder dadurch geführt, daß man durch eine Reihe von Schlüssen zeigt, wie die Behauptung mit vorangegangenen Erklärungen, Grundsätzen oder bereits erwiesenen Lehrsätzen übereinstimme, oder dadurch, daß man darthut, wie man durch Annahme des Gegentheils zu Verkehrtheiten und Widersprüchen genöthiget werde.

5. Zusätze. In Zusätzen wird die Behauptung eines vorangegangenen Satzes noch erweitert. Sie bedürfen ebenfalls eines Beweises, der aber, weil er im vorangegangenen Satze schon angeführt ist, häufig weggelassen wird.

6. In Aufgaben wird verlangt, daß irgend eine geometrische Construktion vorgenommen werden solle. Ihre Auflösung muß der Geometer zeigen, zugleich aber auch die Richtigkeit der Auflösung, wie die der Lehrsätze, erweisen.

7. Folgerungssätze. Zu dieser Gattung von Sätzen gehören alle jene, welche aus anderen Wahrheiten sich unmittelbar ergeben.

Alles, was der Geometer sonst noch zu sagen hat, pflegt derselbe in Anmerkungen niederzulegen.

D.

Grundsätze:

1) Jede Größe ist sich selbst gleich.

2) Zwei Größen, welche einer dritten gleich sind, müssen unter sich selbst gleich seyn.

3) Gleiche Größen, auf gleiche Weise verändert, sind auch nach der Veränderung noch sich gleich.

4) Ungleiche Größen, auf gleiche Weise verändert, sind auch nach der Veränderung ungleich.

5) Gleiche Größen, auf ungleiche Weise verändert, sind nach der Veränderung ungleich.

6) Das Ganze ist jederzeit größer, als sein Theil.

7) Zwei gerade Linien können keine Ebene nach allen Seiten hin begränzen.

8) Figuren, welche auf einander gelegt gedacht, einander in allen Stücken vollkommen decken, kongruent sind, sind in allen Stücken einander gleich.

E.

Geometrische Zeichen:

$+$ heißt hinzuaddirt
$-$ davon abgezogen
$\times$, (.) multiplicirt
: dividirt
$=$ gleich
$<$ kleiner als
$>$ größer als
$\triangle$ Dreieck
$\parallel$ parallel
$\#$ parallel und gleich
$\sim$ ähnlich
$\cong$ kongruent, vollkommen gleich
$\square$ Zeichen fürs Flächenmaß.

Elementare ebene Geometrie.

---

§. 1.

Diejenige geometrische Größe, welche nur *eine* Ausdehnung hat, also nur als *lang* gedacht wird, heißt *Linie*.

§. 2.

Gerade ist eine Linie, wenn alle ihre Punkte einerlei Richtung haben (Fig. 1).

§ 3.

Durch *einen* Punkt können *unendlich* (unbestimmbar) viele gerade Linien nach allen Richtungen hin gezogen gedacht werden.

Die Richtung einer geraden Linie ist durch *zwei* Punkte bestimmt.

Zwischen *zwei* Punkten ist nur *eine* gerade Linie möglich.

Die gerade Linie zwischen zwei Punkten — *der gerade Weg* — ist der kürzeste.

§. 4.

Krumm ist jede Linie, deren einzelne Punkte ihre Richtung beständig ändern (Fig. 2.).

Anmerk. In die elementare ebene Geometrie ist von allen krummen Linien einzig und allein die Kreislinie aufgenommen.

§. 5.

Diejenige geometrische Größe, welche nur nach Länge und Breite ausgedehnt ist, heißt Fläche, und zwar ebene Fläche, Ebene, wenn alle Punkte einer geraden durch irgend zwei Punkte der Ebene gezogenen Linie in ihr liegen.

§. 6.

Kreislinie wird jene krumme, in sich selbst zurückkehrende Linie genannt, welche in allen ihren Punkten von einem in der von ihr begränzten Fläche liegenden Punkt, den man den Mittelpunkt (Centrum) nennt, gleich weit absteht (Fig. 3).

§. 7.

In so ferne die Kreislinie eine Fläche umschließt, heißt sie Umfang (Peripherie), die eingeschlossene Fläche selbst aber Kreisfläche.

§. 8.

Der einfachste Gebrauch des Zirkels und Lineals wird vom Geometer nicht gelehrt, sondern als bekannt vorausgesetzt. Daher wird die Auflösung nachfolgender Aufgaben einem Jeden ohne Weiteres überlassen:

1. Eine gerade Linie zu ziehen.

2. Eine gegebene gerade Linie zu verlängern.
3. Eine Kreislinie zu ziehen.
4. Von einer gegebenen geraden Linie ein Stück abzuschneiden.

§. 9.

Jede vom Mittelpunkte eines Kreises zu dessen Umfange gezogene gerade Linie, wie CE, CF (Fig. 3) nennt man den Halbmesser (Radius) desselben.

§. 10.

Alle Halbmesser des nämlichen Kreises sind gleich groß, oder haben gleiche Länge.

§. 11.

Zieht man vom Mittelpunkte eines Kreises aus eine gerade Linie, welche größer als der Halbmesser desselben Kreises ist, so fällt ihr Endpunkt über den Umfang des Kreises hinaus; ist sie kleiner, so fällt ihr Endpunkt in die Fläche des Kreises hinein, und ist sie dem Halbmesser gleich, in den Umfang des Kreises.

§. 12.

Jede von einem Punkte des Umfangs eines Kreises zu einem anderen gezogene gerade Linie, wie AB (Fig. 3) wird Sehne (Chorde) genannt.

Diejenige Sehne, welche, wie DG, durch den

Mittelpunkt des Kreises geht, heißt dann ins Besondere Durchmesser des Kreises.

§. 13.

Alle Durchmesser des nämlichen Kreises sind gleich groß.

§. 14.

Eine gerade Linie messen, heißt nachsehen, wie oft eine bekannte, als Normalmaß angenommene Länge in ihr enthalten sei.

§. 15.

Eine gerade Linie, an welcher das Normalmaß ein oder mehrere Male bemerklich gemacht ist, und deren man sich zur Bestimmung der Größe anderer gerader Linien bedient, heißt Maßstab.

§. 16.

Das größte gemeinschaftliche Maß zweier gerader Linien ist die größte aller der Linien, durch welche beide genau gemessen werden können.

§. 17.

Das größte gemeinschaftliche Maß zweier gerader Linien zu finden.

Man untersuche, ob die kleinere in der größeren gerade mehrere Male enthalten sei oder nicht. Im ersten Falle ist die kleinere das größte gemeinschaftliche Maß. Im zweiten Falle setze man die Untersuchung mit dem übriggebliebenen Stücke und der kleineren Linie auf gleiche Weise fort, und wiederhole mit dem etwaigen neuen Reste diese Unter-

suchung so lange, bis endlich ein Maß, welches das größte gemeinschaftliche ist, sich ergiebt.

Denn ist (Fig. 4) CD in AB mehrere Male, etwa m Male, so enthalten, daß kein Rest übrig bleibt, so ist CD = CD und AB = m CD, folglich CD das größte gemeinschaftliche Maß. Bleibt aber ein Rest, etwa BE, und ist BE in CD n mal enthalten, so ist CD = n BE und AB = m n BE + BE, folglich BE das größte gemeinschaftliche Maß von AB und CD.

Bleibt aber bei ferneren Versuchen, das größte gemeinschaftliche Maß zu finden, abermals ein Rest, so wird sich obiger Beweis auch für diese Fälle erweitern lassen, wenn anders überhaupt zwischen beiden zu messenden Linien irgend ein gemeinschaftliches Maß besteht.

Lassen sich aber erwähnte Versuche in's Unendliche fortsetzen, so besteht kein gemeinschaftliches Maß zwischen den zu messenden Linien, d. h. sie sind inkommensurabel, oder können ihrer Größe nach nur näherungsweise durch irgend ein beliebiges Maß bestimmt werden.

§. 18.

Das gewöhnlichste Normalmaß zur Bestimmung der Größe von Längen ist der landesübliche Schuh oder Fuß.

Das neue französische Normalmaß, der Meter, ist der zehnmillionste Theil eines Viertels des durch Paris gezogenen Erdmeridians.

§. 19.

Will man die in den verschiedenen Ländern

angenommenen Fußmaße ihrer Länge nach mit einander vergleichen oder bestimmen, so ist für solche Bestimmungen eine Normaleinheit nöthig, wozu man gewöhnlich entweder den älteren französischen Fuß oder den Metre wählt.

§. 20.

Theilt man den älteren französischen Fuß in 144 Theile, Pariser Linien, so ist

1 Fuß in Augsburg	131, 29	Pariser	Linien.
1 „ „ Ansbach	132,	„	„
1 „ „ Nürnberg	134, 67	„	„
1 „ „ München	128, 25	„	„
1 bayerischer Schuh	129, 38	„	„

§. 21.

Der Geometer theilt den Fuß oder Schuh in 10 Theile — Zolle —, jeden Zoll in zehn Linien, jede Linie in 10 Skrupel; der Handwerksmann dagegen theilt den Schuh in 12 Zolle, jeden Zoll in 12 Linien und jede Linie in 12 Skrupel.

Als höhere Einheit gilt die Ruthe, wozu der Geometer 10 Schuhe oder Fuße, der Handwerksmann dagegen ihrer 12, an manchen Orten auch 15 und 16 rechnet.

Die Bezeichnung der erwähnten geometrischen Größen wird aus Nachfolgendem ersichtlich:

So heißt 6° 5′ 8″ 7‴ 2⁗ in Worten: Sechs Ruthen, fünf Fuß, acht Zoll, sieben Linien, zwei Skrupel.

§. 22.

Das Handwerksmaß in geometrisches und das geometrische in Handwerksmaß zu verwandeln.

Ist bei beiden Maßeintheilungen der Schuh oder Fuß immer gleich groß, so brauchen etwa vorkommende Fuße der einen Eintheilung nicht erst umgewandelt zu werden, sondern sind gerade so viele Fuße auch in der anderen Eintheilung.

Ruthen des Handwerksmaßes verwandle man in Schuhe oder Fuße und dividire durch 10, so erhält man Ruthen und Schuhe im geometrischen Maße. Umgekehrt verwandle man Ruthen des geometrischen Maßes in Schuhe und dividire durch 12.

Bedenkt man ferner, daß 12″ Handwerksmaß = 10″ geom. Maßes seien; 144‴ Handwerksm. 100‴ geom., so läßt sich die verlangte Maßverwandlung durch eine einfache Proportion darstellen.

§. 23.

Beispiel. Man verwandle 8″ 6‴ Handwerksmaß in geometrisches.

8″ 6‴ Handwksm. = 102‴ geom. Maß.

Demnach 144 : 102 = 100 : x

```
144|10200|70,83
   |1008 |
   -------
     1200
     1152
     -----
      480
      432
```

Es sind folglich 8″ 6‴ Hdwksm. = 7″ 0‴ 8,3⁗ geometrischen Maßes.

§. 24.

Wird die Ruthe als die zu theilende Grundeinheit angenommen, d. h. wird angenommen, daß 1° Hdwm. = 1° geom. M. sei, so müssen bei Maßverwandlungen selbst Fuße des einen Maßes in Fuße des anderen nach angegebener Anleitung verwandelt werden.

§. 25.

Wenn zwei gerade Linien einen Punkt mit einander gemein haben, in allen übrigen Punkten aber aus einander fallen, so bilden sie am gemeinschaftlichen Punkte, am Scheitel oder an der Spitze, einen Winkel (Fig. 5).

Ein Winkel wird entweder durch einen in denselben geschriebenen kleinen Buchstaben x, y, z u. s. w., oder durch einen an seinen Scheitel gesetzten, oder durch drei Buchstaben bezeichnet, wobei jedoch der am Scheitel stehende in die Mitte gesetzt werden muß.

Die beiden geraden Linien, welche den Winkel bilden, sind die Schenkel desselben.

§. 26.

Die Größe eines Winkels ist nicht abhängig von der Länge, sondern von der Lage der Schenkel zu einander.

Werden gleich große Winkel mit ihrem Scheitel und einem Schenkel auf einander gelegt, so fallen auch die beiden übrigen Schenkel derselben auf einander.

Winkel, welche auf einander gelegt, in ihren Schenkeln auf einander fallen, sind gleich groß.

§. 27.

Steht eine gerade Linie so auf einer anderen, daß sie zwei Winkel bildet, so sind dieses Nebenwinkel (Fig. 6).

Nebenwinkel haben sonach einen Schenkel gemeinschaftlich und bilden in ihren zwei übrigen Schenkeln eine gerade Linie.

§. 28

Sind zwei Nebenwinkel gleich groß, so heißt jeder ein rechter, wofür wir in der Folge das Zeichen q gebrauchen wollen.

§. 29.

Von den beiden, einen rechten Winkel bildenden Linien sagt man, sie stehen senkrecht, lothrecht, perpendikulär auf einander.

§. 30.

Ein Winkel, welcher kleiner ist, als ein rechter, ist ein spitzer, ein größerer aber ein stumpfer Winkel.

Der rechte Winkel ist sonach das Maß der Winkel.

§. 31.

Verlängert man die Schenkel eines Winkels über seinen Scheitel hinaus, so entstehen vier Winkel, von welchen immer je zwei, einander gegenüberliegende, Scheitelwinkel genannt werden (Fig. 7).

§. 32.

Alle rechte Winkel sind gleich groß.

Ist (Fig. 8. α) ∠ ACD = ∠ BCD, so ist jeder der beiden Winkel ein rechter.

Ist ferner (Fig. 8. β.) ∠ acd = ∠ bcd, so ist auch jeder von diesen Winkeln ein rechter.

Denkt man sich nun Fig. β so auf Fig. α gelegt, daß c auf C, ab auf AB, cd aber nach der nämlichen Seite hin, wie CD, fällt, so muß cd entweder auf CD oder CE oder CF zu liegen kommen.

Fiele nun cd nach CF, so wäre ∠ ACF = ∠ acd, und ∠ BCF = ∠ bcd.

Ist aber, wie aus der Voraussetzung folgt, ∠ acd = ∠ bcd, so ist nothwendig auch ∠ ACF = ∠ BCF oder ∠ ACD — ∠ DCF = ∠ BCD + ∠ DCF, was unmöglich ist, da nach der Voraussetzung ∠ ACD = ∠ BCD.

Ein gleicher Widerspruch ergibt sich, wenn man annimmt, cd falle nach CE.

Es kann demnach cd nur auf CD fallen und es muß ∠ ACD = ∠ acd, folglich ∠ ACD = ∠ BCD = ∠ acd = ∠ bcd seyn.

§. 33.

Aus irgend einem Punkte einer geraden Linie kann nur Eine Senkrechte diesseits oder jenseits derselben errichtet werden.

Ist die Senkrechte aus einem der Endpunkte einer geraden Linie errichtet, so bildet dieselbe ihren zweiten rechten Winkel mit der Verlängerung dieser Linie.

§. 34.

Zwei gerade Linien, welche zwei Punkte mit einander gemein haben, bilden nur eine einzige gerade Linie.

Sind AB und AD (Fig. 9) gerade Linien, welche die Linien A und C mit einander gemein haben, so müssen, da zwischen zwei Punkten nur eine gerade Linie möglich ist, die beiden Linien zwischen A und C nur eine gerade Linie bilden. Wollte man nun annehmen, von C aus fielen beide Punkte aus einander, so ließe sich in C eine Senkrechte auf AC errichtet denken, und es müßte dann dieselbe sowohl mit der Verlängerung CB als CD einen rechten Winkel bilden, weßhalb $\angle$ ACE $=$ $\angle$ BCE $=$ $\angle$ DCE seyn müßte, was unmöglich ist, wenn nicht CB und CD in eine gerade Linie zusammenfallen.

§. 35.

Auch die Verlängerungen zweier gerader Linien, welche zwei Punkte mit einander gemein haben, bilden nur eine gerade Linie.

§. 36.

Nebenwinkel sind, zusammengenommen, stets gleich zweien rechten.

Denn sind zwei Nebenwinkel einander gleich, so ist jeder ein rechter, ihre Summa demnach gleich zweien rechten.

Sind aber beide Winkel, wie $\angle$ ACE und $\angle$ BCE (Fig. 8. α.) verschieden, so läßt sich in C

eine Senkrechte CD errichtet denken und es ist $\angle$ ACD $+ \angle$ BCD $= 2$ q. Nun ist aber

$\angle$ ACD $= \angle$ ACE $- \angle$ DCE
und $\angle$ BCD $= \angle$ BCE $+ \angle$ DCE

Demnach $\angle ACD + \angle BCD = \angle ACE + \angle BCE$.

§. 37.

Die Summe aller am Punkte C diesseits der Linie AB liegender Winkel ist gleich zweien rechten. Ebenso ist die Summa aller am Punkte C jenseits AB liegender Winkel gleich zweien rechten; demnach die Summe aller um C liegender Winkel gleich vier rechten.

§. 38.

Haben zwei Winkel einen gemeinschaftlichen Schenkel, ist ferner die Summe dieser zwei Winkel gleich zweien rechten, so bilden die beiden übrigen Schenkel nur eine gerade Linie.

Ist nämlich (Fig. 10) $\angle$ ACD $+ \angle$ BCD $= 2$ q, so bilden AC und BC nur eine einzige gerade Linie.

Denn wäre AC und BC nicht eine gerade Linie, so ließe sich AC so verlängern, daß die Verlängerung mit AC eine gerade ausmachte.

Gesetzt nun diese Verlängerung von AC wäre CE, so müßte $\angle ACD + \angle DCE = 2q$ seyn. Nun war aber ex hyp. $\angle ACD + \angle BCD = 2q$; demnach wäre

$\angle ACD + \angle DCE = \angle ACD + \angle BCD$
und $\angle$ DCE $= \angle$ BCD,

was nach dem 6ten Grundsatze unmöglich, oder dann möglich ist, wenn CE mit CB zusam-

menfällt. Es muß sonach AC und BC nur eine gerade Linie bilden.

§. 39.

Scheitelwinkel sind einander gleich.

Es ist (Fig. 7) $\angle x = \angle y$ und $\angle v = \angle w$.

Denn es ist $\angle x + \angle w = 2q$; ebenso ist

$$\frac{\angle y + \angle w = 2q}{}$$

Demnach $\angle x + \angle w = \angle y + \angle w$

und $\angle x = \angle y$.

Auf gleiche Weise läßt sich zeigen, daß auch $\angle v = \angle w$ sei.

§. 40.

Jede von drei geraden Linien — Seiten — eingeschlossene ebene Fläche wird ein geradliniges Dreieck genannt.

Anmerk. Da in der niederen ebenen Geometrie nur von solchen ebenen Flächen die Rede ist, welche von geraden Linien oder von Kreisen eingeschlossen werden, so soll in der Folge das Beiwort geradlinig, wenn es die Deutlichkeit nicht besonders verlangt, weggelassen werden.

§. 41.

Sind die drei Seiten eines Dreiecks gleich groß, so ist das Dreieck ein gleichseitiges; sind nur zwei Seiten in demselben von gleicher Größe, so ist es ein gleichschenkliges; sind endlich die drei eiten von verschiedener Größe, so ist es ein ungleichseitiges.

§. 42.

In Rücksicht der Winkel werden die Dreiecke eingetheilt in rechtwinklige, stumpfwinklige und spitzwinklige, je nachdem in ihnen ein rechter, stumpfer oder lauter spitze Winkel enthalten sind.

§. 43.

Jedes Dreieck besteht aus 6 Stücken, drei Seiten und drei Winkeln.

Sind zwei Dreiecke in diesen 6 Stücken einander gleich, so werden sie kongruent genannt, weil sie dann so auf einander gelegt gedacht werden können, daß sie in allen Theilen einander gerade decken.

§. 44.

In kongruenten Dreiecken liegen den gleichen Seiten stets gleiche Winkel und den gleichen Winkeln stets gleiche Seiten gegenüber.

§. 45.

Koncentrische Kreise sind solche, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben (Fig. 11).

§. 46.

Koncentrische Kreise, deren Halbmesser einander gleich sind, fallen ganz auf einander, sind kongruent.

Haben zwei koncentrische Kreise verschiedene Halbmesser, so fällt derjenige, welcher den klei-

neren Halbmesser hat, ganz in die Fläche dessen, dessen Halbmesser der größere ist.

§. 47.

Excentrisch werden die Kreise genannt, wenn sie verschiedene Mittelpunkte haben.

§. 48.

Diejenige gerade Linie, welche die Mittelpunkte zweier excentrischer Kreise mit einander verbindet, pflegt Mittelpunktslinie (Centrallinie) genannt zu werden.

§. 49.

Kreise, welche zum Theil innerhalb, zum Theil außerhalb einander liegen, schneiden einander in ihren Umfängen in zwei Punkten, einmal nämlich beim Eintritt des einen in den anderen und zweitens beim Austritte aus demselben (Fig. 12).

§. 50.

Die Summa der Halbmesser zweier sich schneidenden Kreise ist stets größer, als die Mittelpunktslinie derselben.

Denn es ist (Fig. 12) $AE = AD + DE$

$BD = BE + DE$

sonach $AE + BD = AD + BE + DE + DE$

und $AE + BD > AD + BE + DE$

§. 51.

Excentrische Kreise, welche nur einen Punkt mit einander gemein haben, schneiden einander nicht,

sondern berühren nur einander und mögen daher Berührungskreise heißen (Fig. 13).

§. 52.

Die Summa der Halbmesser zweier Berührungskreise ist der Mittelpunktslinie gleich.

Denn es ist $AC + BC = AC + BC = AB$.

§. 53.

Die Summa der Halbmesser zweier ganz aus einander fallender Kreise ist stets kleiner, als die Mittelpunktslinie.

Denn es ist (Fig. 74)

$$AC + BD < AC + BD + CD$$
$$< AB$$

§. 54.

Sind die Halbmesser zweier excentrischer Kreise und ihre Centrallinie so beschaffen, daß je zwei derselben größer sind, als die dritte, so schneiden sich die Umfänge dieser Kreise in zwei Punkten.

Ist (Fig. 12) $AB + BG > AE$ oder ist $AG > AE$, so fällt der Punkt G des Kreises um B außerhalb des Kreises um A.

Ist ferner $AB + AF > BD$, oder ist $BF > BD$, so fällt der Punkt F des Kreises um A außerhalb des Kreises um B.

Hieraus folgt, daß beide Kreise zum Theil aus einander fallen.

Daß sie aber zum Theil auch in einander fallen, ergibt sich, weil $AE + BD > AB$.

Denn fielen beide Kreise auseinander, so wäre nothwendig $AE + BD < AB$; würden aber beide Kreise einander nur berühren, so wäre $AE + BD = AB$ was beides der Voraussetzung widerspricht.

Beide Kreise müssen demnach einander in zwei Punkten schneiden.

§. 55.

Aus den beiden Endpunkten einer geraden Linie Kreise zu beschreiben, welche einander in zwei Punkten schneiden.

Man beschreibe (Fig. 12) aus den Endpunkten A und B der Linie AB zwei Kreise mit Halbmessern, die so beschaffen sind, daß sowohl die Summa je eines Halbmessers und der Linie AB, als die der beiden Halbmesser stets größer ist, als AB.

Man bedenke, daß AB die Mittelpunktslinie beider Kreise bilde und daß diese Kreise nach §. 54 einander in zwei Punkten schneiden.

§. 56.

Zieht man aus A und B nach einem der Durchschnittspunkte, etwa nach C, gerade Linien, so entsteht jederzeit ein Dreieck, dessen Grundlinie die Mittelpunktslinie und dessen übrige Schenkel die Halbmesser der beiden sich schneidenden Kreise bilden.

§. 57.

Aus drei geraden Linien, von welchen je

zwei, zusammen genommen, größer sind, als die dritte, kann jederzeit ein Dreieck konstruirt werden, und zwar aus drei gleichen Seiten ein gleichseitiges, aus zwei gleichen und einer ungleichen Seite ein gleichschenkliges, aus drei ungleichen Seiten ein ungleichseitiges.

§. 58.

Sind zwei Seiten eines Dreiecks, einzeln genommen, nebst ihrem Zwischenwinkel, gleich zweien Seiten mit ihrem Zwischenwinkel in einem anderen Dreiecke, so sind die Dreiecke kongruent, oder in allen Stücken einander gleich.

Ist (Fig. 14) $AC = DF$, $BC = EF$ und $\angle C = \angle F$, so ist $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Denkt man sich nämlich das Dreieck DEF so auf das Dreieck ABC gelegt, daß der Winkel F, welcher dem Winkel C gleich ist, diesen Winkel C gerade deckt, so werden die Schenkel des Winkels F auf die von D, und weil $AC = DF$ und BC EF die Punkte D und E auf A und B fallen.

Da nun zwischen zwei Punkten nur eine gerade Linie möglich ist, so muß auch DE die Linie AB in allen ihren Theilen gerade decken.

Es lassen sich demnach beide Dreiecke so auf einander gelegt denken, daß sie einander in allen Theilen decken, kongruent und deßhalb in allen Stücken einander gleich sind.

Es ist deßhalb auch AB = DE, ∠ A = ∠ D und ∠ B = ∠ E.

§. 59.

In jedem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der dritten (ungleichen) Seite einander gleich.

Ist (Fig. 16) AC = BC, so ist ∠ ABC = ∠ BAC.

Man verlängere AC und BC um die gleichgroßen Stücke AD und BE und verbinde die Punkte B und D, ebenso A und E durch gerade Linien, so ist, da AC = BC, CE = CD und ∠ C = ∠ C, △ ACE ≅ △ BCD, eben deßhalb ∠ E = ∠ D und AE = BD.

Da aber auch BE = AD der Voraussetzung gemäß ist, so ist ferner △ ABE ≅ △ ABD und ∠ BAE = ∠ ABD.

Bedenkt man nun noch, daß, weil △ ACE ≅ △ BCD, nothwendig auch ∠ CAE = ∠ CBD sey, so erkennt man leicht, daß ∠ CAE — ∠ BAE = ∠ CBD — ∠ ABD

oder ∠ BAC = ∠ ABC.

§. 60.

Jedes gleichseitige Dreieck hat 3 gleiche Winkel.

§. 61.

Jedes Dreieck mit zwei gleichen Winkeln ist gleichschenklig.

Mittelpunkt des Kreises geht, heißt dann ins Besondere Durchmesser des Kreises.

§. 13.

Alle Durchmesser des nämlichen Kreises sind gleich groß.

§. 14.

Eine gerade Linie messen, heißt nachsehen, wie oft eine bekannte, als Normalmaß angenommene Länge in ihr enthalten sei.

§. 15.

Eine gerade Linie, an welcher das Normalmaß ein oder mehrere Male bemerklich gemacht ist, und deren man sich zur Bestimmung der Größe anderer gerader Linien bedient, heißt Maßstab.

§. 16.

Das größte gemeinschaftliche Maß zweier gerader Linien ist die größte aller der Linien, durch welche beide genau gemessen werden können.

§. 17.

Das größte gemeinschaftliche Maß zweier gerader Linien zu finden.

Man untersuche, ob die kleinere in der größeren gerade mehrere Male enthalten sei oder nicht. Im ersten Falle ist die kleinere das größte gemeinschaftliche Maß. Im zweiten Falle setze man die Untersuchung mit dem übriggebliebenen Stücke und der kleineren Linie auf gleiche Weise fort, und wiederhole mit dem etwaigen neuen Reste diese Unter-

suchung so lange, bis endlich ein Maß, welches das größte gemeinschaftliche ist, sich ergiebt.

Denn ist (Fig. 4) CD in AB mehrere Male, etwa m Male, so enthalten, daß kein Rest übrig bleibt, so ist CD = CD und AB = m CD, folglich CD das größte gemeinschaftliche Maß. Bleibt aber ein Rest, etwa BE, und ist BE in CD n mal enthalten, so ist CD = n BE und AB = m n BE + BE, folglich BE das größte gemeinschaftliche Maß von AB und CD.

Bleibt aber bei ferneren Versuchen, das größte gemeinschaftliche Maß zu finden, abermals ein Rest, so wird sich obiger Beweis auch für diese Fälle erweitern lassen, wenn anders überhaupt zwischen beiden zu messenden Linien irgend ein gemeinschaftliches Maß besteht.

Lassen sich aber erwähnte Versuche in's Unendliche fortsetzen, so besteht kein gemeinschaftliches Maß zwischen den zu messenden Linien, d. h. sie sind inkommensurabel, oder können ihrer Größe nach nur näherungsweise durch irgend ein beliebiges Maß bestimmt werden.

§. 18.

Das gewöhnlichste Normalmaß zur Bestimmung der Größe von Längen ist der landesübliche Schuh oder Fuß.

Das neue französische Normalmaß, der Meter, ist der zehnmillionste Theil eines Viertels des durch Paris gezogenen Erdmeridians.

§. 19.

Will man die in den verschiedenen Ländern

angenommenen Fußmaße ihrer Länge nach mit einander vergleichen oder bestimmen, so ist für solche Bestimmungen eine Normaleinheit nöthig, wozu man gewöhnlich entweder den älteren französischen Fuß oder den Metre wählt.

§. 20.

Theilt man den älteren französischen Fuß in 144 Theile, Pariser Linien, so ist

1 Fuß in Augsburg	131, 29	Pariser	Linien.
1 „ „ Ansbach	132,	„	„
1 „ „ Nürnberg	134, 67	„	„
1 „ „ München	128, 25	„	„
1 bayerischer Schuh	129, 38	„	„

§. 21.

Der Geometer theilt den Fuß oder Schuh in 10 Theile — Zolle —, jeden Zoll in zehn Linien, jede Linie in 10 Skrupel; der Handwerksmann dagegen theilt den Schuh in 12 Zolle, jeden Zoll in 12 Linien und jede Linie in 12 Skrupel.

Als höhere Einheit gilt die Ruthe, wozu der Geometer 10 Schuhe oder Fuße, der Handwerksmann dagegen ihrer 12, an manchen Orten auch 15 und 16 rechnet.

Die Bezeichnung der erwähnten geometrischen Größen wird aus Nachfolgendem ersichtlich:

So heißt $6^{\circ}\ 5'\ 8''\ 7'''\ 2''''$ in Worten: Sechs Ruthen, fünf Fuß, acht Zoll, sieben Linien, zwei Skrupel.

§. 22.

Das Handwerksmaß in geometrisches und das geometrische in Handwerksmaß zu verwandeln.

Ist bei beiden Maßeintheilungen der Schuh oder Fuß immer gleich groß, so brauchen etwa vorkommende Fuße der einen Eintheilung nicht erst umgewandelt zu werden, sondern sind gerade so viele Fuße auch in der anderen Eintheilung.

Ruthen des Handwerksmaßes verwandle man in Schuhe oder Fuße und dividire durch 10, so erhält man Ruthen und Schuhe im geometrischen Maße. Umgekehrt verwandle man Ruthen des geometrischen Maßes in Schuhe und dividire durch 12.

Bedenkt man ferner, daß 12'' Handwerksmaß = 10'' geom. Maßes seien; 144''' Handwerksm. 100''' geom., so läßt sich die verlangte Maßverwandlung durch eine einfache Proportion darstellen.

§. 23.

Beispiel. Man verwandle 8'' 6''' Handwerksmaß in geometrisches.

8'' 6''' Handwksm. = 102''' geom. Maß.

Demnach 144 : 102 = 100 : x

```
144 | 10200 | 70,83
    | 1008  |
    ---------
       1200
       1152
      ------
        480
        432
```

Es sind folglich 8'' 6''' Hdwksm. = 7'' 0''' 8,3'''' geometrischen Maßes.

§. 24.

Wird die Ruthe als die zu theilende Grundeinheit angenommen, d. h. wird angenommen, daß 1° Hdwm. = 1° geom. M. sei, so müssen bei Maßverwandlungen selbst Fuße des einen Maßes in Fuße des anderen nach angegebener Anleitung verwandelt werden.

§. 25.

Wenn zwei gerade Linien einen Punkt mit einander gemein haben, in allen übrigen Punkten aber aus einander fallen, so bilden sie am gemeinschaftlichen Punkte, am Scheitel oder an der Spitze, einen Winkel (Fig. 5).

Ein Winkel wird entweder durch einen in denselben geschriebenen kleinen Buchstaben x, y, z u. s. w., oder durch einen an seinen Scheitel gesetzten, oder durch drei Buchstaben bezeichnet, wobei jedoch der am Scheitel stehende in die Mitte gesetzt werden muß.

Die beiden geraden Linien, welche den Winkel bilden, sind die Schenkel desselben.

§. 26.

Die Größe eines Winkels ist nicht abhängig von der Länge, sondern von der Lage der Schenkel zu einander.

Werden gleich große Winkel mit ihrem Scheitel und einem Schenkel auf einander gelegt, so fallen auch die beiden übrigen Schenkel derselben auf einander.

Winkel, welche auf einander gelegt, in ihren Schenkeln auf einander fallen, sind gleich groß.

§. 27.

Steht eine gerade Linie so auf einer anderen, daß sie zwei Winkel bildet, so sind dieses Nebenwinkel (Fig. 6).

Nebenwinkel haben sonach einen Schenkel gemeinschaftlich und bilden in ihren zwei übrigen Schenkeln eine gerade Linie.

§. 28

Sind zwei Nebenwinkel gleich groß, so heißt jeder ein rechter, wofür wir in der Folge das Zeichen q gebrauchen wollen.

§. 29.

Von den beiden, einen rechten Winkel bildenden Linien sagt man, sie stehen senkrecht, lothrecht, perpendikulär auf einander.

§. 30.

Ein Winkel, welcher kleiner ist, als ein rechter, ist ein spitzer, ein größerer aber ein stumpfer Winkel.

Der rechte Winkel ist sonach das Maß der Winkel.

§. 31.

Verlängert man die Schenkel eines Winkels über seinen Scheitel hinaus, so entstehen vier Winkel, von welchen immer je zwei, einander gegenüberliegende, Scheitelwinkel genannt werden (Fig. 7).

§. 32.

Alle rechte Winkel sind gleich groß.

Ist (Fig. 8. α) ∠ ACD = ∠ BCD, so ist jeder der beiden Winkel ein rechter.

Ist ferner (Fig. 8. β.) ∠ acd = ∠ bcd, so ist auch jeder von diesen Winkeln ein rechter.

Denkt man sich nun Fig. β so auf Fig. α gelegt, daß c auf C, ab auf AB, cd aber nach der nämlichen Seite hin, wie CD, fällt, so muß cd entweder auf CD oder CE oder CF zu liegen kommen.

Fiele nun cd nach CF, so wäre ∠ ACF = ∠ acd, und ∠ BCF = ∠ bcd.

Ist aber, wie aus der Voraussetzung folgt, ∠ acd = ∠ bcd, so ist nothwendig auch ∠ ACF = ∠ BCF oder ∠ ACD — ∠ DCF = ∠ BCD + ∠ DCF, was unmöglich ist, da nach der Voraussetzung ∠ ACD = ∠ BCD.

Ein gleicher Widerspruch ergibt sich, wenn man annimmt, cd falle nach CE.

Es kann demnach cd nur auf CD fallen und es muß ∠ ACD = ∠ acd, folglich ∠ ACD = ∠ BCD = ∠ acd = ∠ bcd seyn.

§. 33.

Aus irgend einem Punkte einer geraden Linie kann nur Eine Senkrechte diesseits oder jenseits derselben errichtet werden.

Ist die Senkrechte aus einem der Endpunkte einer geraden Linie errichtet, so bildet dieselbe ihren zweiten rechten Winkel mit der Verlängerung dieser Linie.

§. 34.

Zwei gerade Linien, welche zwei Punkte mit einander gemein haben, bilden nur eine einzige gerade Linie.

Sind AB und AD (Fig. 9) gerade Linien, welche die Linien A und C mit einander gemein haben, so müssen, da zwischen zwei Punkten nur eine gerade Linie möglich ist, die beiden Linien zwischen A und C nur eine gerade Linie bilden.

Wollte man nun annehmen, von C aus fielen beide Punkte aus einander, so ließe sich in C eine Senkrechte auf AC errichtet denken, und es müßte dann dieselbe sowohl mit der Verlängerung CB als CD einen rechten Winkel bilden, weßhalb $\angle$ ACE $=$ $\angle$ BCE $=$ $\angle$ DCE seyn müßte, was unmöglich ist, wenn nicht CB und CD in eine gerade Linie zusammenfallen.

§. 35.

Auch die Verlängerungen zweier gerader Linien, welche zwei Punkte mit einander gemein haben, bilden nur eine gerade Linie.

§. 36.

Nebenwinkel sind, zusammengenommen, stets gleich zweien rechten.

Denn sind zwei Nebenwinkel einander gleich, so ist jeder ein rechter, ihre Summa demnach gleich zweien rechten.

Sind aber beide Winkel, wie $\angle$ ACE und $\angle$ BCE (Fig. 8. α.) verschieden, so läßt sich in C

eine Senkrechte CD errichtet denken und es ist $\angle$ ACD $+ \angle$ BCD $= 2$ q. Nun ist aber

$$\angle ACD = \angle ACE - \angle DCE$$
$$\text{und } \angle BCD = \angle BCE + \angle DCE$$

Demnach $\angle ACD + \angle BCD = \angle ACE + \angle BCE$.

§. 37.

Die Summe aller am Punkte C diesseits der Linie AB liegender Winkel ist gleich zweien rechten. Ebenso ist die Summa aller am Punkte C jenseits AB liegender Winkel gleich zweien rechten; demnach die Summe aller um C liegender Winkel gleich vier rechten.

§. 38.

Haben zwei Winkel einen gemeinschaftlichen Schenkel, ist ferner die Summe dieser zwei Winkel gleich zweien rechten, so bilden die beiden übrigen Schenkel nur eine gerade Linie.

Ist nämlich (Fig. 10) $\angle$ ACD $+ \angle$ BCD $= 2$ q, so bilden AC und BC nur eine einzige gerade Linie.

Denn wäre AC und BC nicht eine gerade Linie, so ließe sich AC so verlängern, daß die Verlängerung mit AC eine gerade ausmachte.

Gesetzt nun diese Verlängerung von AC wäre CE, so müßte $\angle ACD + \angle DCE = 2q$ seyn. Nun war aber ex hyp. $\angle ACD + \angle BCD = 2q$; demnach wäre

$$\angle ACD + \angle DCE = \angle ACD + \angle BCD$$
$$\text{und } \angle DCE = \angle BCD,$$

was nach dem 6ten Grundsatze unmöglich, oder nur dann möglich ist, wenn CE mit CB zusam-

menfällt. Es muß sonach AC und BC nur eine gerade Linie bilden.

§. 39.

Scheitelwinkel sind einander gleich.

Es ist (Fig. 7) $\angle x = \angle y$ und $\angle v = \angle w$.

Denn es ist $\angle x + \angle w = 2q$; ebenso ist

$$\angle y + \angle w = 2q$$

Demnach $\angle x + \angle w = \angle y + \angle w$

und $\angle x = \angle y$.

Auf gleiche Weise läßt sich zeigen, daß auch $\angle v = \angle w$ sei.

§. 40.

Jede von drei geraden Linien — Seiten — eingeschlossene ebene Fläche wird ein geradliniges Dreieck genannt.

Anmerk. Da in der niederen ebenen Geometrie nur von solchen ebenen Flächen die Rede ist, welche von geraden Linien oder von Kreisen eingeschlossen werden, so soll in der Folge das Beiwort geradlinig, wenn es die Deutlichkeit nicht besonders verlangt, weggelassen werden.

§. 41.

Sind die drei Seiten eines Dreiecks gleich groß, so ist das Dreieck ein gleichseitiges; sind nur zwei Seiten in demselben von gleicher Größe, so ist es ein gleichschenkliges; sind endlich die drei eiten von verschiedener Größe, so ist es ein ungleichseitiges.

§. 42.

In Rücksicht der Winkel werden die Dreiecke eingetheilt in rechtwinklige, stumpfwinklige und spitzwinklige, je nachdem in ihnen ein rechter, stumpfer oder lauter spitze Winkel enthalten sind.

§. 43.

Jedes Dreieck besteht aus 6 Stücken, drei Seiten und drei Winkeln.

Sind zwei Dreiecke in diesen 6 Stücken einander gleich, so werden sie kongruent genannt, weil sie dann so auf einander gelegt gedacht werden können, daß sie in allen Theilen einander gerade decken.

§. 44.

In kongruenten Dreiecken liegen den gleichen Seiten stets gleiche Winkel und den gleichen Winkeln stets gleiche Seiten gegenüber.

§. 45.

Koncentrische Kreise sind solche, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben (Fig. 11).

§. 46.

Koncentrische Kreise, deren Halbmesser einander gleich sind, fallen ganz auf einander, sind kongruent.

Haben zwei koncentrische Kreise verschiedene Halbmesser, so fällt derjenige, welcher den klei-

neren Halbmesser hat, ganz in die Fläche dessen, dessen Halbmesser der größere ist.

§. 47.

Excentrisch werden die Kreise genannt, wenn sie verschiedene Mittelpunkte haben.

§. 48.

Diejenige gerade Linie, welche die Mittelpunkte zweier excentrischer Kreise mit einander verbindet, pflegt Mittelpunktslinie (Centrallinie) genannt zu werden.

§. 49.

Kreise, welche zum Theil innerhalb, zum Theil außerhalb einander liegen, schneiden einander in ihren Umfängen in zwei Punkten, einmal nämlich beim Eintritt des einen in den anderen und zweitens beim Austritte aus demselben (Fig. 12).

§. 50.

Die Summa der Halbmesser zweier sich schneidenden Kreise ist stets größer, als die Mittelpunktslinie derselben.

Denn es ist (Fig. 12) $AE = AD + DE$
$BD = BE + DE$

sonach $AE + BD = AD + BE + DE + DE$
und $AE + BD > AD + BE + DE$

§. 51.

Excentrische Kreise, welche nur einen Punkt mit einander gemein haben, schneiden einander nicht,

sondern berühren nur einander und mögen daher Berührungskreise heißen (Fig. 13).

§. 52.

Die Summa der Halbmesser zweier Berührungskreise ist der Mittelpunktslinie gleich.

Denn es ist AC + BC = AC + BC = AB.

§. 53.

Die Summa der Halbmesser zweier ganz aus einander fallender Kreise ist stets kleiner, als die Mittelpunktslinie.

Denn es ist (Fig. 74)

$$AC + BD < AC + BD + CD$$
$$< AB$$

§. 54.

Sind die Halbmesser zweier excentrischer Kreise und ihre Centrallinie so beschaffen, daß je zwei derselben größer sind, als die dritte, so schneiden sich die Umfänge dieser Kreise in zwei Punkten.

Ist (Fig. 12) AB + BG > AE oder ist AG > AE, so fällt der Punkt G des Kreises um B außerhalb des Kreises um A.

Ist ferner AB + AF > BD, oder ist BF > BD, so fällt der Punkt F des Kreises um A außerhalb des Kreises um B.

Hieraus folgt, daß beide Kreise zum Theil aus einander fallen.

Daß sie aber zum Theil auch in einander fallen, ergibt sich, weil AE + BD > AB.

Denn fielen beide Kreise auseinander, so wäre nothwendig AE + BD < AB; würden aber beide Kreise einander nur berühren, so wäre AE + BD = AB was beides der Voraussetzung widerspricht.

Beide Kreise müssen demnach einander in zwei Punkten schneiden.

§. 55.

Aus den beiden Endpunkten einer geraden Linie Kreise zu beschreiben, welche einander in zwei Punkten schneiden.

Man beschreibe (Fig. 12) aus den Endpunkten A und B der Linie AB zwei Kreise mit Halbmessern, die so beschaffen sind, daß sowohl die Summa je eines Halbmessers und der Linie AB, als die der beiden Halbmesser stets größer ist, als AB.

Man bedenke, daß AB die Mittelpunktslinie beider Kreise bilde und daß diese Kreise nach §. 54 einander in zwei Punkten schneiden.

§. 56.

Zieht man aus A und B nach einem der Durchschnittspunkte, etwa nach C, gerade Linien, so entsteht jederzeit ein Dreieck, dessen Grundlinie die Mittelpunktslinie und dessen übrige Schenkel die Halbmesser der beiden sich schneidenden Kreise bilden.

§. 57.

Aus drei geraden Linien, von welchen je

zwei, zusammen genommen, größer sind, als die dritte, kann jederzeit ein Dreieck konstruirt werden, und zwar aus drei gleichen Seiten ein gleichseitiges, aus zwei gleichen und einer ungleichen Seite ein gleichschenkliges, aus drei ungleichen Seiten ein ungleichseitiges.

§. 58.

Sind zwei Seiten eines Dreiecks, einzeln genommen, nebst ihrem Zwischenwinkel, gleich zweien Seiten mit ihrem Zwischenwinkel in einem anderen Dreiecke, so sind die Dreiecke kongruent, oder in allen Stücken einander gleich.

Ist (Fig. 14) $AC = DF$, $BC = EF$ und $\angle C = \angle F$, so ist $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Denkt man sich nämlich das Dreieck DEF so auf das Dreieck ABC gelegt, daß der Winkel F, welcher dem Winkel C gleich ist, diesen Winkel C gerade deckt, so werden die Schenkel des Winkels F auf die von D, und weil $AC = DF$ und BC EF die Punkte D und E auf A und B fallen.

Da nun zwischen zwei Punkten nur eine gerade Linie möglich ist, so muß auch DE die Linie AB in allen ihren Theilen gerade decken.

Es lassen sich demnach beide Dreiecke so auf einander gelegt denken, daß sie einander in allen Theilen decken, kongruent und deßhalb in allen Stücken einander gleich sind.

Es ist deßhalb auch AB = DE, ∠ A = ∠ D und ∠ B = ∠ E.

§. 59.

In jedem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der dritten (ungleichen) Seite einander gleich.

Ist (Fig. 16) AC = BC, so ist ∠ ABC = ∠ BAC.

Man verlängere AC und BC um die gleichgroßen Stücke AD und BE und verbinde die Punkte B und D, ebenso A und E durch gerade Linien, so ist, da AC = BC, CE = CD und ∠ C = ∠ C, △ ACE ≅ △ BCD, eben deßhalb ∠ E = ∠ D und AE = BD.

Da aber auch BE = AD der Voraussetzung gemäß ist, so ist ferner △ ABE ≅ △ ABD und ∠ BAE = ∠ ABD.

Bedenkt man nun noch, daß, weil △ ACE ≅ △ BCD, nothwendig auch ∠ CAE = ∠ CBD sey, so erkennt man leicht, daß ∠ CAE — ∠ BAE = ∠ CBD — ∠ ABD

oder ∠ BAC = ∠ ABC.

§. 60.

Jedes gleichseitige Dreieck hat 3 gleiche Winkel.

§. 61.

Jedes Dreieck mit zwei gleichen Winkeln ist gleichschenklig.

Ist (Fig. 15) $\angle$ BAC $=$ $\angle$ ABC, so ist AC $=$ BC.

Wäre nämlich AC nicht gleich dem BC, so müßte einer von beiden Schenkeln größer seyn, als der andere.

Wäre nun BC $>$ AC, so ließe sich von BC ein Stück abschneiden, das dem AC gleich wäre.

Gesetzt, BD wäre dieses abgeschnittene Stück, so müßte, wenn man die Punkte A und D durch eine gerade Linie verbände, $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ ABC seyn.

Denn es wäre dann BD $=$ AC, AB $=$ AB, $\angle$ ABD $=$ $\angle$ ABC $=$ $\angle$ BAC.

Diese Folgerung steht indessen im Widerspruche mit dem 6ten Grundsatze.

Es ist daher die Annahme, daß BC $>$ AC, unzulässig.

Eben so unstatthaft erweist sich die Annahme, daß AC $>$ BC.

Es muß demnach AC $=$ BC seyn.

§. 62.

Jedes Dreieck mit drei gleichen Winkeln ist gleichseitig.

§. 63.

Sind die drei Seiten eines Dreiecks, einzeln genommen, gleich den drei Seiten eines anderen, so sind die Dreiecke kongruent oder in allen Stücken einander gleich

Es sey (Fig. 17, 18, 19) AB $=$ ab, AC $=$ ac, BC $=$ bc, so ist $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ abc.

Denn legt man beide Dreiecke in Gedanken nicht auf einander, sondern mit einer gleichen Seite an einander, so daß etwa a auf A und ab auf AB falle, so muß, da ab = AB auch b auf B zu liegen kommen.

Verbindet man dann beide einander gegenüber liegende Mittelpunkte C und c durch eine gerade Linie, so fällt diese Verbindungslinie entweder zwischen die Schenkel der Dreiecke hinein (Fig. 17), oder mit zwei Schenkeln derselben zusammen (Fig. 18), oder über die Schenkel der Dreiecke hinaus (Fig. 19).

Im ersten Falle ist

$$AC = ac, \text{ sonach } \angle x = \angle z$$
$$BC = bc, \text{ mithin } \angle y = \angle v$$

und deßhalb $\angle x + \angle y = \angle z + \angle v$ oder $\angle ACB = \angle acb$, folglich $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

Im zweiten Falle ist, da BC = bc, nothwendig $\angle x = \angle y$ und $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

Im dritten Falle ist 1) wegen Gleichheit der Seiten BC und bc, $\angle BCc = \angle Ccb$; 2) wegen Gleichheit der Seiten AC und ac, $\angle ACc = \angle acC$; demnach $\angle BCc - \angle ACc = \angle Ccb - \angle acC$ oder $\angle ACB = \angle acb$ und $\triangle ABC \cong \triangle abc$.

§. 64.

An einem Punkte einer gegebenen Linie einen Winkel zu errichten, welcher einem anderen, vorgegebenen, gleich sey.

Es sey AB die gegebene Linie, C der in ihr gegebene Punkt, EDF der vorgegebene Winkel (Fig. 20).

Man wähle in DE und DF willkürlich zwei Punkte, und verbinde dieselben durch eine gerade Linie GH, so entsteht das Dreieck DHG.

Schneidet man nun von CB ein Stück CK ab, welches dem DG gleich ist, so läßt sich über CK ein Dreieck konstruiren, worin CK = DG; CI = DH, IK = HG.

Sonach $\triangle$ CIK $\cong$ $\triangle$ DHG und $\angle$ ICK = $\angle$ HDG.

§. 65.

Schneidet man von den Schenkeln des vorgegebenen Winkels gleich große Stücke ab, so entstehen gleichschenklige Dreiecke und die Aufgabe läßt sich um so schneller lösen.

§. 66.

Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Man schneide von den Schenkeln des vorgegebenen Winkels BAC (Fig. 21) gleich große Stücke, nämlich AD = AE ab, ziehe aus den Durchschnittspunkten mit gleichen Halbmessern sich schneidende Bögen und verbinde diesen Durchschnittspunkt F mit dem Winkelpunkte A durch eine Gerade, so ist dieses die Halbirungslinie.

Denn es ist AD = AE, DF = EF, AF = AF, folglich $\triangle$ ADF $\cong$ $\triangle$ AEF und $\angle$ DAF = $\angle$ EAF = $\frac{1}{2}$ $\angle$ DAE = $\frac{1}{2}$ $\angle$ BAC.

§. 67.

Eine gegebene begränzte gerade Linie zu halbiren.

Man beschreibe über und unter der gegebenen

Linie AB (Fig. 22) mit gleichen Halbmessern sich schneidende Bögen und verbinde die beiden Durchschnittspunkte durch eine Gerade, so halbirt diese die gegebene Linie AB.

Verbindet man nämlich die beiden Endpunkte von AB mit den Durchschnittspunkten durch gerade Linien, so entstehen die beiden Dreiecke ACD und BCD.

Da nun AC = BC, AD = BD, CD = CD, so ist $\triangle$ ACD $\cong$ $\triangle$ BCD und $\angle$ ACD = $\angle$ BCD, oder $\angle$ ACE = $\angle$ BCE.

Da endlich auch CE = CE, so folgt, daß $\triangle$ ACE $\cong$ $\triangle$ BCE und AE = BE = $\frac{1}{2}$ AB sey.

§. 68.

Eine Senkrechte aus einem gegebenen Punkte einer geraden Linie zu errichten.

Von dem Punkte C (Fig. 23) aus schneide man nach beiden Seiten hin gleich große Stücke von AB ab, so daß also CD = CE werde, ziehe ferner aus D und E mit gleichen Halbmessern zwei sich schneidende Bögen und verbinde den Durchschnittspunkt mit C durch eine Gerade, so ist dieses eine Senkrechte.

Denn verbindet man die Punkte D und E durch gerade Linien mit dem Durchschnittspunkte F, so entstehen zwei kongruente Dreiecke, nämlich $\triangle$ CDF $\cong$ $\triangle$ CEF, woraus sich ergibt, daß $\angle$ DCF = $\angle$ ECF = q, folglich CF eine Senkrechte sey.

§. 69.

Ist der Punkt, von welchem aus die Senk-

rechte errichtet werden soll, der Endpunkt einer geraden Linie, so verlängere man dieselbe und verfahre, wie eben gelehrt worden ist.

§. 70.

Eine Senkrechte von einem Punkte aus, welcher außerhalb einer geraden Linie liegt, auf dieselbe oder deren Verlängerung zu errichten.

Es sey (Fig. 24 α und β) C der Punkt, von welchem aus, und AB die Linie, auf welche eine Senkrechte errichtet werden soll, so ziehe man von C aus einen Kreisbogen, welcher AB oder deren Verlängerung in zwei Punkten schneidet, nämlich in D und E, ziehe darauf von diesen Durchschnittspunkten aus zwei in F sich schneidende Kreisbögen mit gleichen Halbmessern, verbinde den Punkt C mit dem Durchschnittspunkte F durch eine gerade Linie und es wird dieselbe wenigstens in ihrer Verlängerung senkrecht auf AB stehen.

Denn es ist (Fig. 24 α) $CD = CE$, $DF = EF$, $CF = CF$ und $\triangle CDF \cong \triangle CEF$, woraus folgt, daß $\angle x = \angle y$, und da $CD = CE$, $CG = CG$, daß $\triangle CDG \cong \triangle CEG$.

Hieraus ergiebt sich ferner, daß $\angle DGC = \angle EGC = q$ und CG eine Senkrechte sey.

Auf ähnliche Weise wird der Beweis für (Fig. 24 β) geführt.

§. 71.

Wird irgend eine Seite eines Dreiecks verlängert, so ist der dadurch entstandene äußere

Winkel größer als jeder der gegenüber liegenden inneren.

Verlängert man (Fig. 25) im Dreiecke ABC die Seite AB nach D, so ist ∠ CBD > ∠ ACB und auch ∠ CBD > ∠ BAC.

Halbirt man BC, zieht von A nach dem Halbirungspunkte E eine Gerade, verlängert dieselbe, schneidet von der Verlängerung ein Stück EF = AE ab und verbindet B mit F durch eine Gerade, so ist CE = BE, AE = EF, ∠ AEC = ∠ BEF, folglich △ ACE ≅ △ BEF und ∠ ACE = ∠ EBF.

Da nun ∠ CBD > ∠ EBF, so ist auch ∠ CBD > ∠ ACE und ∠ CBD > ∠ ACB.

Verlängert man ferner CB nach G, so ist ∠ ABG = ∠ CBD.

Halbirt man nun AB in I, zieht CI, verlängert CI und schneidet von der Verlängerung ein dem CI gleiches Stück IH ab und verbindet B mit H durch eine Gerade, so ist CI = IH, AI = BI, ∠ AIC = ∠ BIH und deßhalb △ ACI ≅ △ BIH.

Hieraus ergibt sich, daß ∠ IBH = ∠ CAI.

Da nun ∠ ABG > ∠ IBH, so ist auch
∠ ABG > ∠ CAI oder
∠ CBD > ∠ BAC.

§. 72.

In jedem Dreiecke sind je zwei Winkel, zusammengenommen, kleiner als zwei rechte.

Demnach ist (Fig. 26) 1) ∠ w + ∠ v < 2 q.
2) ∠ x + ∠ w < 2 q.
3) ∠ v + ∠ x < 2 q.

rechte errichtet werden soll, der Endpunkt einer geraden Linie, so verlängere man dieselbe und verfahre, wie eben gelehrt worden ist.

§. 70.

Eine Senkrechte von einem Punkte aus, welcher außerhalb einer geraden Linie liegt, auf dieselbe oder deren Verlängerung zu errichten.

Es sey (Fig. 24 α und β) C der Punkt, von welchem aus, und AB die Linie, auf welche eine Senkrechte errichtet werden soll, so ziehe man von C aus einen Kreisbogen, welcher AB oder deren Verlängerung in zwei Punkten schneidet, nämlich in D und E, ziehe darauf von diesen Durchschnittspunkten aus zwei in F sich schneidende Kreisbögen mit gleichen Halbmessern, verbinde den Punkt C mit dem Durchschnittspunkte F durch eine gerade Linie und es wird dieselbe wenigstens in ihrer Verlängerung senkrecht auf AB stehen.

Denn es ist (Fig. 24 α) $CD = CE$, $DF = EF$, $CF = CF$ und $\triangle CDF \cong \triangle CEF$, woraus folgt, das $\angle x = \angle y$, und da $CD = CE$, $CG = CG$, daß $\triangle CDG \cong \triangle CEG$.

Hieraus ergiebt sich ferner, daß $\angle DGC = \angle EGC = q$ und CG eine Senkrechte sey.

Auf ähnliche Weise wird der Beweis für (Fig. 24 β) geführt.

§. 71.

Wird irgend eine Seite eines Dreiecks verlängert, so ist der dadurch entstandene äußere

Winkel größer als jeder der gegenüber liegenden inneren.

Verlängert man (Fig. 25) im Dreiecke ABC die Seite AB nach D, so ist $\angle$ CBD $>$ $\angle$ ACB und auch $\angle$ CBD $>$ $\angle$ BAC.

Halbirt man BC, zieht von A nach dem Halbirungspunkte E eine Gerade, verlängert dieselbe, schneidet von der Verlängerung ein Stück EF $=$ AE ab und verbindet B mit F durch eine Gerade, so ist CE $=$ BE, AE $=$ EF, $\angle$ AEC $=$ $\angle$ BEF, folglich $\triangle$ ACE $\cong$ $\triangle$ BEF und $\angle$ ACE $=$ $\angle$ EBF.

Da nun $\angle$ CBD $>$ $\angle$ EBF, so ist auch $\angle$ CBD $>$ $\angle$ ACE und $\angle$ CBD $>$ $\angle$ ACB.

Verlängert man ferner CB nach G, so ist $\angle$ ABG $=$ $\angle$ CBD.

Halbirt man nun AB in I, zieht CI, verlängert CI und schneidet von der Verlängerung ein dem CI gleiches Stück IH ab und verbindet B mit H durch eine Gerade, so ist CI $=$ IH, AI $=$ BI, $\angle$ AIC $=$ $\angle$ BIH und deßhalb $\triangle$ ACI $\cong$ $\triangle$ BIH.

Hieraus ergibt sich, daß $\angle$ IBH $=$ $\angle$ CAI.

Da nun $\angle$ ABG $>$ $\angle$ IBH, so ist auch

$\angle$ ABG $>$ $\angle$ CAI oder

$\angle$ CBD $>$ $\angle$ BAC.

§. 72.

In jedem Dreiecke sind je zwei Winkel, zusammengenommen, kleiner als zwei rechte.

Demnach ist (Fig. 26) 1) $\angle w + \angle v < 2q$.

2) $\angle x + \angle w < 2q$.

3) $\angle v + \angle x < 2q$.

rechte errichtet werden soll, [illegible]
raden Linie, so verlängere [illegible]
fahre, wie eben gelehrt wor[illegible]

§. 70.

Eine Senkrechte [illegible]
welcher außerhalb ein[illegible]
auf dieselbe oder [illegible]
richten.

Es sey (Fig. [illegible]
welchem aus, [illegible]
Senkrechte errichtet werden soll, [illegible]
C aus einen Kreisbogen, welcher [illegible]
Verlängerung in zwei Punkten schn[illegible]
in D und E, ziehe darauf von diesen [illegible]
punkten aus zwei in F sich schneiden[illegible]
mit gleichen Halbmessern, verbinde [illegible]
dem Durchschnittspunkte F durch [illegible]
nie und es wird dieselbe wenigsten[illegible]
längerung senkrecht auf AB steh[illegible]

Denn es ist (Fig. 24 α) CD [illegible]
EF, CF = CF und △ CDF [illegible]
raus folgt, daß ∠ x = ∠ y, [illegible]
CG = CG, daß △ CDG ≅ [illegible]

Hieraus ergiebt sich ferner, [illegible]
∠ EGC = q und CG eine Senkr[illegible]

Auf ähnliche Weise wird der [illegible]
(Fig. 24 β) geführt.

§. 71.

Wird irgend eine Seite eines Dre[illegible]
längert, so ist der dadurch entstandene [illegible]

Winkel größer als jeder der gegenüber liegenden inneren.

Verlängert man (Fig. 25) im Dreiecke ABC die Seite AB nach D, so ist ∠ CBD > ∠ ACB und auch ∠ CBD > ∠ BAC.

Halbirt man BC, zieht von A nach dem Halbirungspunkte E eine Gerade, verlängert dieselbe, schneidet von der Verlängerung ein Stück EF = AE ab und verbindet B mit F durch eine Gerade, so ist CE = BE, AE = EF, ∠ AEC = ∠ BEF, folglich △ ACE ≅ △ BEF und ∠ ACE = ∠ EBF.

Da nun ∠ CBD > ∠ EBF, so ist auch ∠ CBD > ∠ ACE und ∠ CBD > ∠ ACB.

Verlängert man ferner CB nach G, so ist ∠ ABG = ∠ CBD.

Halbirt man nun AB in I, zieht CI, verlängert CI und schneidet von der Verlängerung ein dem CI gleiches Stück IH ab und verbindet B mit H durch eine Gerade, so ist CI = IH, AI = BI, ∠ AIC = ∠ BIH und deßhalb △ ACI ≅ △ BIH.

Hieraus ergibt sich, daß ∠ IBH = ∠ CAI.

Da nun ∠ ABG > ∠ IBH, so ist auch
∠ ABG > ∠ CAI oder
∠ CBD > ∠ BAC.

§. 72.

In jedem Dreiecke sind je zwei Winkel, zusammengenommen, kleiner als zwei rechte.

Demnach ist (Fig. 26) 1) ∠ w + ∠ v < 2 q.
2) ∠ x + ∠ w < 2 q.
3) ∠ v + ∠ x < 2 q.

Man wähle in DE und DF willkürlich zwei Punkte, und verbinde dieselben durch eine gerade Linie GH, so entsteht das Dreieck DHG.

Schneidet man nun von CB ein Stück CK ab, welches dem DG gleich ist, so läßt sich über CK ein Dreieck konstruiren, worin CK = DG; CI = DH, IK = HG.

Sonach △ CIK ≅ △ DHG und ∠ ICK = ∠ HDG.

§. 65.

Schneidet man von den Schenkeln des vorgegebenen Winkels gleich große Stücke ab, so entstehen gleichschenklige Dreiecke und die Aufgabe läßt sich um so schneller lösen.

§. 66.

Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Man schneide von den Schenkeln des vorgegebenen Winkels BAC (Fig. 21) gleich große Stücke, nämlich AD = AE ab, ziehe aus den Durchschnittspunkten mit gleichen Halbmessern sich schneidende Bögen und verbinde diesen Durchschnittspunkt F mit dem Winkelpunkte A durch eine Gerade, so ist dieses die Halbirungslinie.

Denn es ist AD = AE, DF = EF, AF = AF, folglich △ ADF ≅ △ AEF und ∠ DAF = ∠ EAF = $\frac{1}{2}$ ∠ DAE = $\frac{1}{2}$ ∠ BAC.

§. 67.

Eine gegebene begränzte gerade Linie zu halbiren.

Man beschreibe über und unter der gegebenen

Linie AB (Fig. 22) mit gleichen Halbmessern sich schneidende Bögen und verbinde die beiden Durchschnittspunkte durch eine Gerade, so halbirt diese die gegebene Linie AB.

Verbindet man nämlich die beiden Endpunkte von AB mit den Durchschnittspunkten durch gerade Linien, so entstehen die beiden Dreiecke ACD und BCD.

Da nun AC = BC, AD = BD, CD = CD, so ist △ ACD ≅ △ BCD und ∠ ACD = ∠ BCD, oder ∠ ACE = ∠ BCE.

Da endlich auch CE = CE, so folgt, daß △ ACE ≅ △ BCE und AE = BE = $\frac{1}{2}$ AB sey.

§. 68.

Eine Senkrechte aus einem gegebenen Punkte einer geraden Linie zu errichten.

Von dem Punkte C (Fig. 23) aus schneide man nach beiden Seiten hin gleich große Stücke von AB ab, so daß also CD = CE werde, ziehe ferner aus D und E mit gleichen Halbmessern zwei sich schneidende Bögen und verbinde den Durchschnittspunkt mit C durch eine Gerade, so ist dieses eine Senkrechte.

Denn verbindet man die Punkte D und E durch gerade Linien mit dem Durchschnittspunkte F, so entstehen zwei kongruente Dreiecke, nämlich △ CDF ≅ △ CEF, woraus sich ergibt, daß ∠ DCF = ∠ ECF = q, folglich CF eine Senkrechte sey.

§. 69.

Ist der Punkt, von welchem aus die Senk-

rechte errichtet werden soll, der Endpunkt einer geraden Linie, so verlängere man dieselbe und verfahre, wie eben gelehrt worden ist.

§. 70.

Eine Senkrechte von einem Punkte aus, welcher außerhalb einer geraden Linie liegt, auf dieselbe oder deren Verlängerung zu errichten.

Es sey (Fig. 24 α und β) C der Punkt, von welchem aus, und AB die Linie, auf welche eine Senkrechte errichtet werden soll, so ziehe man von C aus einen Kreisbogen, welcher AB oder deren Verlängerung in zwei Punkten schneidet, nämlich in D und E, ziehe darauf von diesen Durchschnittspunkten aus zwei in F sich schneidende Kreisbögen mit gleichen Halbmessern, verbinde den Punkt C mit dem Durchschnittspunkte F durch eine gerade Linie und es wird dieselbe wenigstens in ihrer Verlängerung senkrecht auf AB stehen.

Denn es ist (Fig. 24 α) $CD = CE$, $DF = EF$, $CF = CF$ und $\triangle CDF \cong \triangle CEF$, woraus folgt, das $\angle x = \angle y$, und da $CD = CE$, $CG = CG$, daß $\triangle CDG \cong \triangle CEG$.

Hieraus ergiebt sich ferner, daß $\angle DGC = \angle EGC = q$ und CG eine Senkrechte sey.

Auf ähnliche Weise wird der Beweis für (Fig. 24 β) geführt.

§. 71.

Wird irgend eine Seite eines Dreiecks verlängert, so ist der dadurch entstandene äußere

Winkel größer als jeder der gegenüber liegenden inneren.

Verlängert man (Fig. 25) im Dreiecke ABC die Seite AB nach D, so ist $\angle$ CBD $>$ $\angle$ ACB und auch $\angle$ CBD $>$ $\angle$ BAC.

Halbirt man BC, zieht von A nach dem Halbirungspunkte E eine Gerade, verlängert dieselbe, schneidet von der Verlängerung ein Stück EF $=$ AE ab und verbindet B mit F durch eine Gerade, so ist CE $=$ BE, AE $=$ EF, $\angle$ AEC $=$ $\angle$ BEF, folglich $\triangle$ ACE $\cong$ $\triangle$ BEF und $\angle$ ACE $=$ $\angle$ EBF.

Da nun $\angle$ CBD $>$ $\angle$ EBF, so ist auch $\angle$ CBD $>$ $\angle$ ACE und $\angle$ CBD $>$ $\angle$ ACB.

Verlängert man ferner CB nach G, so ist $\angle$ ABG $=$ $\angle$ CBD.

Halbirt man nun AB in I, zieht CI, verlängert CI und schneidet von der Verlängerung ein dem CI gleiches Stück IH ab und verbindet B mit H durch eine Gerade, so ist CI $=$ IH, AI $=$ BI, $\angle$ AIC $=$ $\angle$ BIH und deßhalb $\triangle$ ACI $\cong$ $\triangle$ BIH.

Hieraus ergibt sich, daß $\angle$ IBH $=$ $\angle$ CAI.

Da nun $\angle$ ABG $>$ $\angle$ IBH, so ist auch

$\angle$ ABG $>$ $\angle$ CAI oder

$\angle$ CBD $>$ $\angle$ BAC.

§. 72.

In jedem Dreiecke sind je zwei Winkel, zusammengenommen, kleiner als zwei rechte.

Demnach ist (Fig. 26) 1) $\angle w + \angle v < 2\,q$.

2) $\angle x + \angle w < 2\,q$.

3) $\angle v + \angle x < 2\,q$.

Denn es ist, um den unten Nr. 1 gegebenen Fall zu beweisen $\angle v < \angle z$, demnach $\angle v + \angle w < \angle z + \angle w$ oder da $\angle z + \angle w = 2q$, $\angle v + \angle w < 2q$.

Auf gleiche Weise lassen sich die unter Nr. 2 und Nr. 3 gegebenen Fälle beweisen.

§. 73.

In einem Dreiecke kann sonach nicht mehr als ein rechter oder stumpfer Winkel enthalten seyn.

Jedes gleichseitige Dreieck ist spitzwinklig.

§. 74.

Der größeren Seite eines Dreiecks steht immer auch ein größerer Winkel gegenüber.

Ist nämlich (Fig. 27) $AB > AC$, so läßt sich von AB ein Stück abschneiden, das dem AC gleich ist.

Ist das abgeschnittene Stück AD und verbindet man D mit C durch eine Gerade, so ist $\angle ACD = \angle ADC$.

Nun ist aber $\angle ADC > \angle ABC$, daher auch $\angle ACD > \angle ABC$ und um so mehr $\angle ACB > \angle ABC$.

§. 75.

Dem größeren Winkel eines Dreiecks steht immer auch die größere Seite gegenüber.

Ist (Fig. 27) $\angle ACB > \angle ABC$, so ist $AB > AC$.

Denn wäre $AB = AC$, so müßte $\angle ACB = \angle ABC$ seyn.

Wäre $AB < AC$, so wäre nothwendig $\angle ACB < \angle ABC$.

Beide Annahmen sind aber gegen die Voraussetzung, also unzulässig.

Kann nun AB weder gleich sein dem AC noch kleiner als AC, so muß es nothwendig größer sein.

§. 76.

Von allen geraden Linien, welche von einem Punkte aus nach einer anderen geraden Linie gezogen werden, ist die senkrechte die kürzeste.

§. 77.

Je zwei Seiten eines Dreiecks sind, zusammen genommen, stets größer als die dritte.

Es ist (Fig. 28) $AC + BC > AB$.

Denn ist das Dreieck ein gleichseitiges, so sind je zwei Seiten, zusammengenommen, stets doppelt so groß, als die dritte.

Ist das Dreieck ein gleichschenkliges oder ungleichseitiges, so verlängere man BC um ein dem AC gleiches Stück CD, so ist $BD = BC + AC$. Da nun $AC = CD$, so ist $\angle CAD = \angle ADC$ und $\angle CAD + \angle BAC > \angle ADC$, oder $\angle BAD > \angle ADB$, demnach $BD > AB$ oder $AC + BC > AB$.

§. 78.

Wenn man von irgend einem in der Fläche eines Dreiecks liegenden Punkte aus nach den beiden Endpunkten irgend einer Seite des Dreiecks gerade Linien zieht, so sind diese, zu-

sammengenommen, kleiner, als die beiden übrigen Seiten des Dreiecks, schließen aber einen größeren Winkel ein.

Sonach ist (Fig. 29)

$$AD + BD < AC + BC$$

und $\angle ADB > \angle ACB$.

Denn es ist $AC + CE > AE$,

$$BE + DE > BD,$$

folglich

$$AC + CE + BE + DE > AE + BD$$

$$AC + CE + BE + DE > AD + BD + DE$$

$$AC + CE + BE > AD + BD$$

$$AC + BC > AD + BD, \text{ oder}$$

$$AD + BD < AC + BC.$$

Da endlich $\angle AEB > \angle ACB$

und $\angle ADB > \angle AEB$, so ist

um so mehr $\angle ADB > \angle ACB$.

§. 79.

Wenn eine Seite und zwei Winkel eines Dreiecks gleich sind einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln eines anderen, so sind die Dreiecke kongruent.

Ist (Fig. 30) $AB = ab$, $\angle BAC = \angle bac$, $\angle ABC = abc$, so muß auch $BC = bc$ und die Dreiecke folglich kongruent seyn.

Denn wäre BC nicht gleich bc, so müßte es entweder größer oder kleiner seyn als bc.

Wäre $BC > bc$, so ließe sich von BC ein dem bc gleiches Stück, etwa BD, abschneiden.

Verbände man dann A mit D durch eine Gerade, so wäre $AB = ab$, $BD = bc$, $\angle ABD =$

$\angle$ abc, sonach $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ abc und $\angle$ BAD $=$ $\angle$ bac $=$ $\angle$ BAC, was unmöglich oder nur dann möglich ist, wenn der Punkt D in den Punkt C fällt.

Wäre BC $<$ bc, so ließe sich an dem Dreiecke abc der nämliche Widerspruch zeigen.

Es muß sonach BC $=$ bc und $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ abc seyn.

Ist AB $=$ ab, $\angle$ BAC $=$ $\angle$ bac und $\angle$ ACB $=$ $\angle$ acb, so läßt sich auf gleiche Weise darthun, daß $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ abc sey.

§. 80.

Sind zwei Seiten eines Dreiecks, einzeln genommen, gleich zweien Seiten eines anderen, sind ferner die Winkel, die in beiden Dreiecken der größeren von diesen Seiten gegenüber liegen, einander gleich, so sind die Dreiecke kongruent.

Ist (Fig. 30) AB $=$ ab, AC $=$ ac, AC $>$ AB und ac $>$ ab, ferner $\angle$ ABC $=$ $\angle$ abc, so ist auch BC $=$ bc und folglich $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ abc.

Wäre BC nicht gleich bc, so wäre es entweder größer oder kleiner als bc.

Wäre BC $>$ bc, so ließe sich von BC ein dem bc gleiches Stück, etwa BD abschneiden, und es wäre dann BD $=$ bc, $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ abc und AD $=$ ac $=$ AC.

Hieraus folgt, daß $\angle$ ADC $=$ $\angle$ ACD $=$ $\angle$ ACB.

Nun ist aber $\angle$ ADC $>$ $\angle$ ABC, folglich

auch $\angle ACB > \angle ABC$, was, da $AC > AB$ angenommen worden, unmöglich ist.

Wollte man annehmen, $BC < bc$, so ließe sich der so eben gezeigte Widerspruch auch am Dreiecke abc darthun.

Es muß sonach $BC = bc$ und folglich $\triangle ABC \cong \triangle abc$ seyn.

§. 81.

Ein Dreieck ist daher durch zwei Seiten und den Winkel, welcher der größeren von diesen Seiten gegenüber liegt, vollkommen bestimmt.

Sind hingegen zwei Seiten mit dem Winkel gegeben, welcher der kleineren von diesen Seiten gegenüber liegt, so lassen sich daraus zwei verschiedene Dreiecke konstruiren.

§. 82.

Fassen wir die Lehre von der Congruenz der Dreiecke nochmals zusammen, so ergibt sich, daß die Struktur eines Dreiecks bestimmt sey.

1) durch zwei Seiten mit ihrem Zwischenwinkel,
2) durch drei Seiten,
3) durch eine Seite und zwei Winkel,
4) durch zwei Seiten nebst dem Gegenwinkel der größeren.

Soll demnach ein Dreieck verzeichnet werden, welches einem vorgegebenen in allen Stücken gleich oder kongruent sei, so verzeichne man ein Dreieck,

welches mit dem gegebenen die unter Nr. 1, 2, 3 oder 4 aufgeführten Stücke gemein hat.

§. 83.

Sind zwei Seiten eines Dreiecks gleich zweien Seiten eines anderen, ihre Zwischenwinkel aber verschieden, so liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

Ist (Fig. 31) AC = ac, BC = bc, ∠ ACB > ∠ acb, so ist auch AB > ab.

Denkt man sich nämlich das Dreieck abc so auf das Dreieck ABC gelegt, daß c auf C und cb auf CB zu liegen komme, so muß, da CB = cb, auch b auf B fallen. Die Linie ac wird aber, da ∠ ACB > ∠ acb, zwischen AC und BC hinein, und zwar der Endpunkt a in einen Punkt der Peripherie eines mit Ac = ac von C aus gezogenen Kreises fallen. Und hierbei können sich nun folgende drei Fälle ereignen: Entweder fällt der Punkt a mit einem Punkte der Linie AB, etwa mit F zusammen, oder er fällt ganz über das Dreieck ABC hinaus nach E oder in dasselbe hinein nach D.

Fällt A nach F, so ist △ BCF ≅ △ abc und BF = ab. Daß aber AB > BF und folglich auch AB > ab ergibt sich aus dem 6ten Grundsatz.

Fällt a nach E und verbindet man A und E, und B und E durch gerade Linien, so ist △ BCE ≅ △ abc und BE = ab. Ferner ist, da AC = ac = CE, das Dreieck ACE ein gleichschenkliges und ∠ CAE = ∠ AEC, daher ∠ AEC >

BAE, folglich AB $>$ BE und sonach auch AB $>$ ab.

Fällt endlich a nach D, so ist $\triangle$ BCD $\cong$ $\triangle$ abc und BD $=$ ab. Da aber

$$\begin{array}{rcl} AB + AC & > & BD + CD \text{ und} \\ AC & = & CD \\ \hline \end{array}$$

so ist AB $>$ BD und sonach auch AB $>$ ab.

§. 84.

Sind zwei Seiten eines Dreiecks gleich zweien Seiten eines anderen, die dritten Seiten aber verschieden, so liegt der größeren von diesen Seiten stets auch der größere Winkel gegenüber.

Ist (Fig. 31) AC $=$ ac, BC $=$ bc, AB $>$ ab, so ist auch $\angle$ ACB $>$ $\angle$ acb.

Denn wäre $\angle$ ACB $=$ $\angle$ acb, so müßte AB $=$ ab seyn.

Wäre dagegen $\angle$ ACB $<$ $\angle$ acb, so wäre AB $<$ ab, was beides der Voraussetzung widerspricht.

Kann aber der $\angle$ ACB nicht gleich seyn dem $\angle$ acb und auch nicht kleiner seyn, so ist er nothwendig größer.

§. 85.

Wird aus der von den zwei gleichen Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks gebildeten Winkelspitze zur Mitte der ungleichen Seite eine gerade Linie gezogen, so halbirt dieselbe

das Dreieck, den Winkel an der Spitze und steht senkrecht auf der Grundlinie.

Denn ist (Fig. 32) AC = BC, CD = CD, AD = BD, so ist △ ACD ≌ △ BCD, und jedes ½ △ ABC; ferner ist ∠ ACD = ∠ BCD = ½ ∠ ACB, ∠ ADC = ∠ BDC = q und folglich CD senkrecht.

§. 86.

Zieht man in einem gleichschenkligen Dreiecke aus der von den gleichen Schenkeln gebildeten Winkelspitze eine Senkrechte auf die ungleiche Seite, so geht dieselbe durch die Mitte dieser Seite, halbirt den Winkel an der Spitze und das Dreieck.

Da nämlich (Fig. 32) CD senkrecht auf AB steht, so ergibt sich leicht, daß △ ACD ≌ △ BCD, woraus folgt, daß AD = BD = ½ AB, ∠ ACD = ∠ BCD = ½ ∠ ACB und daß △ ACD = ½ △ ACB, sowie △ BCD = ½ △ ABC.

§. 87.

Wird in einem gleichschenkligen Dreiecke aus der Mitte der ungleichen Seite eine Senkrechte nach der Seite der von den gleichen Schenkeln gebildeten Winkelspitze errichtet, so geht dieselbe, gehörig verlängert, durch diese Spitze.

Daß eine aus der Spitze C (Fig. 32) nach der Mitte D gezogene gerade Linie senkrecht auf AB stehe, ist bereits erwiesen.

Ginge nun eine aus D errichtete und gehörig

verlängerte gerade Linie nicht durch die Spitze C, so müßten von einem Punkte einer geraden Linie nach derselben Seite hin zwei Senkrechte sich errichten lassen, was unmöglich ist.

§. 80.

Parallelen sind jene Linien in einer Ebene, welche überall gleich weit von einander abstehen, oder deren Entfernung überall die nämliche ist.

§. 89.

Unter Entfernung zweier, in einer Ebene liegender Linien, verstehe man auf der einen senkrecht errichtete, und bis zur anderen oder deren Verlängerung verlängerte gerade Linien.

§. 90.

Nähert sich eine Line einer Ebene einer andern Linie, so verkürzen sich die zwischen ihnen gezogenen Senkrechten.

§. 91.

Nähern sich zwei Punkte einer geraden Linie um gleich große Entfernungen einer anderen, so müssen sich alle Punkte der Linie um die nämliche Entfernung nähern.

§. 92.

Die Entfernung des Mittelpunktes eines Kreises von jedem Punkte seines Umfangs ist dem Halbmesser dieses Kreises gleich.

§. 93.

Die Entfernung der Umfänge zweier konzentrischer Kreise ist sonach überall dem Unterschiede der Halbmesser dieser Kreise gleich. Daher sind konzentrische Kreise Parallelen.

§. 94.

Durch einen, außerhalb einer geraden Linie liegenden Punkt kann zu dieser nur eine Parallele gezogen werden, und jede andere, durch den nämlichen Punkt gezogene Parallele fällt mit dieser Parallele zusammen.

Die zu AB (Fig. 34) durch den Punkt E gezogene Parallele sey CD.

Könnte nun durch den Punkt E außer CD noch eine andere Parallele gezogen werden, so müßte dieselbe entweder die Lage von HI oder FG haben, und errichtete man in L eine Senkrechte und verlängerte dieselbe, bis sie FG, CD und HI schneiden würde, so müßte, zöge man noch aus E eine Senkrechte EO auf AB, nothwendig EO = ML, EO = KL oder EO = NL, mithin KL = ML oder NL = ML seyn, was nach dem 6ten Grundsatze unmöglich oder nur dann gedacht werden kann, wenn die Punkte K, M und N in einen Punkt, und sonach die Linien FG und HI mit CD selbst zusammenfallen.

§. 95.

Zwei geradlinige Parallelen zu ziehen.

Man ziehe (Fig. 33) eine gerade Linie AB,

errichte auf derselben zwei gleich große Senkrechte EF und GH und ziehe durch die Endpunkte derselben eine gerade Linie, so ist dieses eine Parallele.

Denkt man sich nämlich die Linie CD in ihren beiden Punkten E und G der Linie AB um EF = GH genähert, so fällt E und G in die Linie AB, und CD und AB bilden nur eine gerade Linie, was nicht seyn könnte, wenn irgend Punkte der Linie CD entfernter oder weniger entfernt von AB oder deren Verlängerung gedacht werden könnten, als E und F von AB entfernt waren. Daher ist AB || CD.

§. 96.

Zwei in einer Ebene liegende gerade Linien, welche in zwei Punkten gleiche Entfernung von einander haben, sind in allen Punkten gleich weit von einander entfernt, oder parallel.

§. 97.

Die Verlängerungen zweier geradliniger Parallelen sind ebenfalls parallel.

§. 98.

Geradlinige Parallelen werden, wenn man sie auch noch so weit verlängert, einander niemals schneiden.

Anmerk. Gleiche Behauptungen, wie sie in §. 97 und 98 von den geraden Linien aufgestellt sind, können auch von den krummen aufgestellt werden, gehören aber nicht hieher.

§. 99.

Durch einen Punkt, welcher außerhalb einer unbegränzten geraden Linie liegt, eine Parallele zu ziehen.

Gesetzt, der gegebene Punkt sey (Fig. 33) E, so ziehe man aus diesem nach der Geraden AB oder deren Verlängerung eine Senkrechte EF, errichte darauf in einem anderen Punkte der Geraden AB eine gleich große Senkrechte GH, verbinde die Endpunkte beider Senkrechten, nämlich E und G, durch eine Gerade, und es wird sowohl diese Gerade EG, als ihre Verlängerung eine Parallele seyn.

Der Beweis ist §. 95 geführt.

§. 100

Werden zwei gerade Linien so von einer dritten geschnitten, daß 1) die Wechselwinkel einander, 2) der äußere seinem an der nämlichen Seite der schneidenden Linie liegenden inneren gleich ist, und daß 3) die beiden inneren, an der nämlichen Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel, in Summa zwei rechte betragen, so sind die beiden geschnittenen geraden Linien parallel.

Sind (Fig. 37) die Wechselwinkel x und y schiefe Winkel, so läßt sich von H auf CD, oder deren Verlängerung eine Senkrechte HI, und ebenso von G auf AB, oder deren Verlängerung eine Senkrechte GK ziehen, und es ist sodann $\angle x = \angle y$, $\angle HIG = \angle HKG = q$, $GH = GH$, und

demnach $\triangle$ GHI $\cong$ $\triangle$ GHK, woraus sich ergibt, daß HI = GK und sonach AB || CD sey.

Sind aber die Wechselwinkel rechte (Fig. 36) so schneide man von K aus nach der Rechten und Linken gleich große Stücke, nämlich KH = KG ab, und verbinde den Punkt I mit G und H durch gerade Linien, so ist KH = KG, IK = IK, $\angle$ HKI = $\angle$ GKI = q, folglich $\triangle$ HIK $\cong$ $\triangle$ GIK, HI = GI und $\angle$ HIK = $\angle$ GIK. War aber $\angle$ CIK = q, so war auch $\angle$ DIK = q, folglich $\angle$ CIK = $\angle$ DIK und $\angle$ CIK — $\angle$ GIK = $\angle$ DIK — $\angle$ HIK, oder $\angle$ CIG = $\angle$ DIH.

Errichtet man nun von G und H aus Senkrechte auf CD oder deren Verlängerung, so ist $\angle$ GEI = $\angle$ HFI = q, und da, wie eben gezeigt worden ist, auch $\angle$ CIG = $\angle$ DIH, oder $\angle$ EIG = $\angle$ FIH, GI = HI, so ist $\triangle$ GEI $\cong$ $\triangle$ HIF, sonach EG = HF und AB || CD.

Ist ferner (Fig. 37) $\angle$ z = $\angle$ y, so ist, da auch $\angle$ z = $\angle$ x, nothwendig $\angle$ y = $\angle$ x und folglich AB || CD.

Wenn endlich $\angle$ DGH + $\angle$ y = 2 q, so ist, da auch $\angle$ DGH + $\angle$ x = 2 q ist, nothwendig auch $\angle$ x = $\angle$ y und folglich AB || CD.

Anmerkung. Ob die Winkel schiefe oder rechte seyen, macht in Rücksicht der beiden letzten Beweise keinen Unterschied.

§. 101.

Nach vorstehendem Lehrsatze läßt sich nun die oben angeführte Aufgabe, zwei Parallelen zu verzeichnen, auf folgende Weise lösen:

Man ziehe eine gerade Linie AB, schneide dieselbe durch eine andere Gerade unter beliebigem Winkel, verzeichne dann an irgend einem Punkte der schneidenden Linie den gleichen Wechselwinkel, und verlängere dessen beide Schenkel etwa bis C und D, so ist AB || CD.

§ 102.

Werden zwei geradlinige Parallelen von einer dritten geraden Linie geschnitten, so sind

1) die Wechselwinkel einander gleich,

2) der äußere gleich seinem an der nämlichen Seite der schneidenden Linie liegenden inneren Winkel,

3) die beiden innern, an der nämlichen Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel, zusammen, gleich zweien rechten.

Geschieht der Schnitt unter schiefen Winkeln, so lassen sich (Fig. 37) aus den Durchschnittspunkten H und G Senkrechte auf die gegenüber stehenden Parallelen oder deren Verlängerung errichtet denken, und es ist dann IH = GK.

Nun ist ferner GH = GH und $\angle$ HIG = $\angle$ HKG = q, folglich $\triangle$ HIG $\cong$ $\triangle$ GHK und sonach $\angle$ x = $\angle$ y.

Wäre y ein rechter Winkel, d. h. stünde EF senkrecht auf AB, so fiele HI und GK mit GH in eine Linie zusammen, und $\angle$ x müßte sonach ebenfalls ein rechter und daher dem $\angle$ y gleich seyn.

Ist 2) AB || CD, so ist $\angle$ x = $\angle$ y; da aber auch $\angle$ z = $\angle$ x, so ist auch $\angle$ z = $\angle$ y.

Für die dritte Behauptung bezeichnen wir der

Kürze wegen den $\angle$ DGH mit $\angle$ v, so ist $\angle$ x $+ \angle$ v $= 2$ q. Da aber $\angle$ x $= \angle$ y, so ist auch $\angle$ v $+ \angle$ y $= 2$ q.

§. 103.

Sind zwei gerade Linien parallel zu einer dritten, so sind sie unter sich selbst parallel.

Sind die beiden Linien AB und CD (Fig. 38) parallel zu EF, so ist $\angle$ x $= \angle$ z und $\angle$ y $= \angle$ z, folglich auch $\angle$ x $= \angle$ y und sonach AB $\parallel$ CD.

Anmerkung. Siehe meine „Neue Begründung der Parallelen-Theorie. 1836. Kampe.

§. 104.

Verlängert man irgend eine Seite eines Dreiecks, so ist der dadurch entstandene Außenwinkel so groß, als beide gegenüber liegende Winkel zusammengenommen.

Verlängert man AB (Fig. 25 β) nach E und zieht BD $\parallel$ AC, so ist $\angle$ x $= \angle$ v, $\angle$ y $= \angle$ w, demnach $\angle$ (x$+$y) $= \angle$ v $+ \angle$ w oder $\angle$ CBE $= \angle$ v $+ \angle$ w.

§. 105.

Hierauf ergibt sich, daß $\angle$ CBE $+ \angle$ z $= \angle$ v $+ \angle$ w $+ \angle$ z $= 2$ q, oder daß die drei Winkel eines Dreiecks stets gleich sind zweien rechten.

§. 106.

Sind zwei Winkel eines Dreiecks, welche

kleiner als zwei rechte sind, bestimmt, so ist es stets auch der dritte.

Es können demnach jede drei Winkel, von welcher Größe auch jeder für sich seyn mag, als in einem Dreieck vorkommend gedacht werden, wenn nur ihre Summa zwei rechte Winkel beträgt.

§. 107.

Da ein Dreieck ein bestimmtes ist, sobald eine Seite mit zwei Winkeln bestimmt ist, so folgt, daß wenn man an die Endpunkte einer Geraden zwei Winkel verzeichnet, die in Summa kleiner als zwei rechte sind, und ihre Schenkel gehörig verlängert, diese verlängerten Schenkel sich nothwendig unter demjenigen Winkel schneiden müssen, welcher die zwei übrigen Winkel zu zwei rechten ergänzt.

§. 108.

Demnach steht der Satz fest: Werden zwei in einer Ebene liegende Winkel von einer dritten so geschnitten, daß die beiden inneren, an einer Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel, kleiner als zwei rechte sind, so müssen diese Linien, gehörig verlängert, einander schneiden, oder mit der schneidenden Linie ein Dreieck bilden.

Anmerkung. Dieser Satz erscheint hier nicht, wie bei Euklid, als Axiom, sondern als eine aus der Parallelentheorie mit Evidenz hervorgegangene Wahrheit.

§. 109.

Jede von vier Seiten umgränzte ebene Fläche ist ein Viereck (Fig. 39—44), so genannt von den vier, in dieser Figur vorkommenden, Winkeln oder Ecken.

§. 110.

Unter den Vierecken unterscheidet man Parallelogramme, Paralleltrapeze, Trapeze.

§. 111.

Sind je zwei einander gegenüber liegende Seiten eines Vierecks parallel, so ist das Viereck ein Parallelogramm (Fig. 39—42).

§. 112.

Sind nur zwei einander gegenüber liegende Seiten eines Vierecks parallel, (die andern zwei also nicht parallel), so ist dasselbe ein Paralleltrapez (Fig. 43).

§. 113.

Ist endlich keine der vier Seiten eines Vierecks mit einer anderen parallel, so heißt das Viereck ein Trapez (Fig. 44).

§. 114.

Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke getheilt.

§. 115.

Daher sind in jedem Parallelogramme

1) die gegenüber liegenden Seiten nicht blos parallel, sondern auch gleich;
2) die gegenüber liegenden Winkel einander gleich;
3) ist die Summa je zweier, an einer Seite des Parallelogramms liegender Winkel, gleich 2q;
4) ist die Summa aller Winkel eines Parallelogramms gleich 4q;
5) ist ein Winkel eines Parallelogramms ein rechter, so sind auch die übrigen lauter rechte.

§. 116.

Unter den Parallelogrammen unterscheiden wir wiederum das Quadrat, das Rechteck, den Rhombus und das Rhomboid.

§. 117.

Im Quadrate sind alle vier Seiten einander gleich, die Winkel lauter rechte (Fig. 39).

§. 118.

Im Rechtecke sind nur je zwei einander gegenüber liegende Seiten gleich, die Winkel ebenfalls rechte (Fig. 40).

§. 119.

Die Seiten eines Rhombus sind einander gleich, die Winkel aber schief (Fig. 41).

§. 120.

Im Rhomboide dagegen sind nur je zwei

einander gegenüber liegende Seiten einander gleich, die Winkel jedoch ebenfalls schief (Fig. 42).

§. 121.

Jede von einem Winkelpunkte eines Vierecks — sowie eines Vielecks — zu einem anderen gezogene gerade Linie, welche mit keiner Seite des Vierecks zusammenfällt, ist eine Diagonale.

§. 122.

Ein Quadrat, Rechteck, einen Rhombus, ein Rhomboid, Paralleltrapez und Trapez zu konstruiren.

§. 123.

Verbindet man die Endpunkte zweier gleicher und paralleler Linien durch gerade Linien, so daß ein Viereck entsteht, so ist dieses Viereck ein Parallelogramm.

§. 124.

Figuren, welche gleich große Flächen haben, werden gleich genannt.

§. 125.

Parallelogramme auf einerlei Grundseite und zwischen einerlei Parallelen sind gleich groß. (Fig. 45)

Denn es ist $\triangle$ ADF $\cong$ $\triangle$ CBE, sonach
ABED — $\triangle$ CBE = ABED — $\triangle$ ADF oder
ABCD = ABEF.

§. 126.

Errichtet man von F nach AB oder deren Verlängerung eine Senkrechte FG, welche man dann die Höhe des schiefwinkligen Parallelogramms nennt, so ist FG = AD. Es ist demnach jedes schiefwinklige Parallelogramm einem rechtwinkligen gleich, welches gleiche Höhe und einerlei Grundseite mit ihm hat.

§. 127.

Bedenkt man, daß Parallelogramme von gleichen Höhen und gleichen Grundseiten mit ihren Grundseiten auf einander gestellt werden können und dann zwischen einerlei Parallelen (der Grundseite nämlich und derjenigen Parallele, welche durch die Spitzen der gleichen Höhen gezogen gedacht werden kann) liegen, so kann obiger Satz auch dahin ausgedrückt werden:

Parallelogramme auf gleichen Grundlinien und von gleichen Höhen sind einander gleich.

§. 128.

Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Höhe und gleicher Grundseite. Daher steht auch der Satz fest:

Dreiecke von gleichen Grundseiten und gleichen Höhen haben gleichen Flächeninhalt.

§. 129.

Halbirt man die beiden Grundseiten eines Parallelogramms und verbindet die Halbirungspunkte durch eine gerade Linie, so entstehen zwei neue

Parallelogramme, von denen jedes die Hälfte vom ursprünglich gegebenen ist.

§. 130.

Aus dem Vorangegangenen lassen sich leicht nachfolgende Aufgaben lösen:

1) Ein Parallelogramm in ein anderes mit gegebenem Winkel über der nämlichen Grundseite zu verwandeln.

2) Ein Dreieck in ein anderes mit gegebenem Winkel über der nämlichen Grundseite zu verwandeln.

3) Ein Dreieck in ein Parallelogramm von gleicher Höhe zu verwandeln.

4) Ein Parallelogramm in ein Dreieck von gleicher Höhe zu verwandeln.

5) Ein Dreieck in ein Parallelogramm von vorgegebenem Winkel zu verwandeln.

6) Ein Parallelogramm in ein Dreieck von vorgegebenem Winkel zu verwandeln.

7) Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkliges über der nämlichen Grundlinie zu verwandeln.

§. 131.

Ein Parallelogramm in ein anderes mit gegebener Seite zu verwandeln.

Verlängere vom Parallelogramme AD (Fig. 46) die Seite AC um die gegebene Seite CE, ziehe durch E und D bis zur verlängerten AB nach H

eine Gerade, darauf EG || AH, GH || AE und verlängere noch BD nach F und CD nach I, so ist Prllgo AD = Prllgo DG, welches letztere die gegebene Seite hat.

§. 132.

Ein Parallelogramm in ein anderes mit gegebener Seite und gegebenem Winkel zu verwandeln.

§. 133.

Ein Dreieck in ein anderes mit gegebener Seite zu verwandeln.

Im Dreiecke ABC (Fig. 47) verlängere AC und BC über C hinaus, mache CD der gegebenen Seite gleich und ziehe BD; darauf zeichne AE || BD, verlängere AE bis es die verlängerte BC schneidet und verbinde D mit E durch eine Gerade, so ist △ CDE = △ ABC.

Oder: Mache die Seite AB (Fig. 48) gleich der gegebenen Seite AD, verbinde C mit D durch eine Gerade, zeichne BE || CD und verbinde E mit D durch eine Gerade, so ist △ADE = △ ABC.

§. 134.

1) Ein Dreieck in ein anderes mit gegebener Seite und gegebenem Winkel zu verwandeln.

2) Ein gleichschenkliges Dreieck in ein anderes von größerer oder kleinerer Höhe zu verwandeln (Fig. 49).

3) Ein Dreieck in ein Parallelogramm von gleicher Höhe zu verwandeln.

4) Ein Paralleltrapez in ein Parallelogramm zu verwandeln (Fig. 51).

5) Ein Paralleltrapez in ein Parallelogramm zu verwandeln, welches zur Seite eine Parallele des Paralleltrapezes hat.

§. 135.

Nennt man die Menge der Maßeinheiten der Grundseite eines Rechtecks m, — die Maßzahl der Höhe desselben n, so läßt sich leicht zeigen, daß in diesem Rechtecke mn Quadrate enthalten seyen.

Um daher die Zahl zu finden, welche die in dem Rechtecke enthaltenen Quadrate ausdrückt, messe man mit gleichem Maße Grundseite und Höhe und multiplicire die so gefundenen Maßzahlen mit einander.

§. 136.

Jeder Quadratfuß hat 100 Quadratzolle, jeder Quadratzoll 100 Quadratlinien geometrischen Maßes u. s. f. Im Handwerksmaß hält dagegen jeder Quadratfuß 144 Quadratzolle u. s. f.

§. 137.

Da jedes schiefwinklige Parallelogramm einem rechtwinkligen von gleicher Höhe und gleicher Grundseite gleich ist, so berechnet man stets statt des schiefwinkligen ein rechtwinkliges von bezeichneter Beschaffenheit.

§. 138.

Der Quadratinhalt eines Dreieckes, als der

Hälfte eines Parallelogramms, ergibt sich, wenn man ein Rechteck von gleicher Höhe und Grundseite berechnet und davon die Hälfte nimmt. Daher die Regel:

Man multiplicire die Maßzahl der Grundseite mit der der Höhe und dividire das Produkt durch 2. Oder:

Man multiplicire die halbe Maßzahl der Grundseite mit der der Höhe.

Oder: Man multiplicire die Maßzahl der Grundseite mit der der halben Höhe.

§. 139.

Ist G die Maßzahl der Grundseite eines Dreiecks, H die seiner Höhe, so ist des Dreiecks Quadratinhalt $a = \frac{GH}{2}$, demnach $\frac{2a}{G} = H$ und $\frac{2a}{H} = G$.

§. 140.

Bezeichnen G und g die Maßzahlen der Grundseiten zweier Parallelogramme, H und h die ihrer Höhen, so verhalten sich die Quadratinhalte derselben, wie GH : gh, bei gleichen Grundseiten, wie H : h und bei gleichen Höhen, wie G : g.

§. 141.

Dieselben Behauptungen, wie die in vorigem Paragraphen für die Parallelogramme aufgestellten, gelten auch unter gleichen Umständen für die Dreiecke.

§ 142.

1) Ein Parallelogramm von vorgegebener Seite und gegebenem Winkel zu verzeichnen, welches mehreren gegebenen gleich ist.

2) Von einem Parallelogramme ein kleineres abzuschneiden, welches eine größere oder kleinere Höhe hat, so daß wieder ein Parallelogramm übrig bleibt.

3) Ein Dreieck zu verzeichnen, welches eine bestimmte Höhe hat und mehreren gegebenen von verschiedener Höhe gleich ist.

4) Von einem Dreiecke ein kleineres abzuschneiden, welches eine größere oder kleinere Höhe hat, so daß wieder ein Dreieck übrig bleibt.

§. 143.

Den Quadratinhalt eines Pararalleltrapezes zu finden.

Bedenkt man, daß ein Paralleltrapez, wie ABCD (Fig. 52) durch eine Diagonale, etwa BD, in zwei Dreiecke getheilt werde, welche gleiche Höhe EF haben und deren Grundlinien die beiden Parallelen AB und CD sind, so ist der Quadratinhalt a des Paralleltrapezes leicht zu bestimmen. Denn es ist dann $a = \frac{AB \times EF}{2} + \frac{CD \times EF}{2} = \left(\frac{AB + CD}{2}\right) EF.$

Daher die Regel: Man addire die Maß-

zahlen beider parallelen Seiten, halbire ihre Summa und multiplicire dann diese Hälfte mit der Maßzahl der gemeinschaftlichen Höhe. Oder:

Man addire die Maßzahlen beider parallelen Seiten, und multiplizire ihre Summa mit der Hälfte der Maßzahl der gemeinschaftlichen Höhe.

§. 144.

Um den Inhalt eines Trapezes zu berechnen, theile man dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke. Berechnet man dann den Inhalt eines jeden für sich und addiret die Inhalte derselben, so ist ihre Summa der Inhalt des Trapezes.

§. 145.

Der Umfang (Perimeter) ist die Summa der Seiten, welche eine Figur begränzen.

§. 146.

Um daher die Größe des Umfangs einer Figur zu bestimmen, bestimme man die Größe jeder einzelnen Seite und addire die Maßzahlen der so gefundenen Längen.

§. 147.

Wie ergibt sich der Umfang eines Quadrates, Rechteckes, Rhombus und Rhomboids?

§. 148.

Im rechtwinkligen Dreiecke heißen die den

rechten Winkel einschließenden Seiten Katheten und die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite Hypotenuse.

§ 149.

Im rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse stets gleich der Summa der Quadrate der beiden Katheten.

Denn zieht man (Fig. 53) AK || BD, verbindet man ferner A und D, C und I, A und E, B und F durch gerade Linien, so ist

$$\triangle CBI \cong \triangle ABD. \text{ Es ist aber}$$

$$\text{auch } \triangle CBI = \tfrac{1}{2}\, ABIH$$

$$\triangle ABD = \tfrac{1}{2}\, BDLK$$

$$\text{folglich } \tfrac{1}{2}\, ABIH = \tfrac{1}{2}\, BDLK$$

$$ABIH = BDLK.$$

$$\text{Ferner ist } \triangle CBF \cong \triangle ACE$$

$$\triangle CBF = \tfrac{1}{2}\, ACFG$$

$$\triangle ACE = \tfrac{1}{2}\, CEKL$$

$$\text{demnach } \tfrac{1}{2}\, ACFG = \tfrac{1}{2}\, CEKL$$

$$ACFG = CEKL$$

$$ABIH + ACFG = BDKL + CEKL$$

$$= BCED.$$

Anmerkung. Vorstehender Satz wird von seinem Erfinder Pythagoras der pythagoräische Lehrsatz, wegen seiner Wichtigkeit für die gesammte Mathesis aber magister matheseos genannt.

§. 150.

Sind zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks bekannt, die dritte aber unbekannt,

so läßt sich dieselbe leicht durch Rechnung bestimmen.

Denn es ist $BC = \sqrt{(AC^2 + AB)}$

$AB = \sqrt{(BC^2 - AC^2)}$

$AC = \sqrt{(BC^2 - AB^2)}$

§. 151.

Die Höhe und den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks aus einer Seite zu bestimmen.

Zieht man aus der Spitze eines gleichseitigen Dreieckes auf die Grundseite eine Senkrechte, so halbirt dieselbe die Grundseite und es läßt sich diese Senkrechte oder die Höhe des Dreiecks nach dem pythagoräischen Lehrsatze und daher der Inhalt des Dreiecks selbst bestimmen.

§. 152.

Auf gleiche Weise läßt sich die Höhe und der Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks aus einer der zwei gleichen und der ungleichen Seite bestimmen.

§. 153.

Ist in einem Dreiecke das Quadrat der einen Seite so groß, als die Quadrate der beiden anderen Seiten, zusammengenommen, so schließen die beiden anderen Seiten einen rechten Winkel ein.

Ist (Fig. 54) $BC^2 = AB^2 + AC^2$, so errichte man aus dem Punkte A eine Senkrechte AD

$= AB$ und ziehe CD, so ist $CD^2 = AD^2 + AC^2$ und da $AD = AB$, offenbar auch $BC^2 = CD^2$ oder $BC = CD$.

Ist aber $AB = AD$, $AC = AC$, $BC = CD$, so ist $\triangle ABC \cong \triangle ACD$ und $\angle BAC = \angle DAC = q$.

§. 154.

1) Zwei oder mehrere Quadrate in ein anderes zu verwandeln.

2) Ein Quadrat zu verzeichnen, welches dem Unterschiede zweier Quadrate gleich ist.

3) Ein Quadrat zu verzeichnen, welches halb so groß, als ein anderes vorgegebenes sey.

4) Ein Quadrat 2, 3, 4....n mal so groß zu machen, als es ist.

§. 155.

Zieht man mit irgend einer Seite eines Dreiecks eine Parallele, so stehen die abgeschnittenen Stücke der beiden anderen Seiten sowohl unter sich, als zu den geschnittenen Seiten in Proportion.

Ist nämlich (Fig. 55) $DE \parallel AB$, so ist

1) $CD : AD = CE : BE$
2) $AC : CD = BC : CE$
3) $AC : AD = BC : BE$.

Zieht man nämlich AE, so haben die beiden Dreiecke CDE und ADE gleiche Höhe und es ist demnach $\triangle CDE : \triangle ADE = CD : AD$.

Zieht man ferner BD, so haben die beiden

Dreiecke CDE und BDE ebenfalls gleiche Höhe und es ist daher △ CDE : △ BDE = CE : BE.

Bedenkt man noch, daß △ ADE, = △ BDE, so ist nothwendig CD : AD = CE : BE. Hieraus ergibt sich ferner

CD+AD : CD = CE+BE : CE und
CD+AD : AD = CE+BE : BE, oder
AC : CD = BC : CE
AC : AD = BC : BE.

Zieht man von D aus eine die Linie AB schneidende Parallele zu BC, nämlich DG, oder zieht man aus E eine die Linie AB schneidende Parallele zu AC, nämlich EH, so ergeben sich leicht auch nachfolgende Proportionen:

CD : DE = AC : AB
CE : DE = BC : AB.

§. 156.

Werden zwei Seiten eines Dreiecks so von einer geraden Linie geschnitten, daß eine der im vorigen § angeführten Proportionen stattfindet, so ist die schneidende Linie eine Parallele zur dritten Seite des Dreiecks.

Gesetzt, es wäre (Fig. 56) gegeben AC : CD = BC : CE, so müßte DE || AB. Denn wäre DE nicht parallel zu AB, so ließe sich aus D eine Parallele zu AB etwa DF ziehen und es wäre dann AC : CD = BC : CF, woraus sich ergibt, daß CF = CE seyn müsse, was unmöglich oder nur dann möglich ist, wenn CF mit CE in eine Linie zusammenfällt.

Es muß demnach auch DE || AB seyn.

§. 157.

Dreiecke, deren gleichliegende Winkel **gleich** und deren gleichliegende Seiten **proportional** sind, sind einander ähnlich.

§. 158.

Sind die drei Winkel eines Dreiecks, einzeln genommen, gleich dreien Winkeln eines anderen Dreiecks, so sind die Seiten beider Dreiecke proportional, die Dreiecke selbst also einander ähnlich.

Es sey (Fig. 57) $\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$, $\angle C = \angle c$, so ist auch $AC : ac = AB : ab = BC : bc$ und sonach $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

Denn schneidet man von C nach A ein Stück ab, nämlich $Cm = ac$ und zieht aus m die Linie $mn \parallel AB$, so ist $\angle x = \angle A = \angle a$, $\angle y = B = \angle b$, folglich $Cmn \cong \triangle abc$ und $Cn = bc$, $mn = ab$.

Ist aber $mn \parallel AB$, so finden folgende Proportionen statt:

1. $AC : Cm = AB : mn$
   $AC : ac = AB : ab$
2. $BC : Cn = AB : mn$
   $BC : bc = AB : ab$

Demnach $AC : ac = AB : ab = BC : bc$ und $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

Auch sind Dreiecke ähnlich, wenn 2 Winkel des einen, einzeln genommen, gleich sind zweien Winkeln im anderen.

§. 159.

Sind die drei Seiten eines Dreiecks pro-

portional dreien Seiten eines anderen Dreiecks so sind die den proportionalen Seiten gegenüber liegenden Winkel in beiden Dreiecken einander gleich, die Dreiecke folglich einander ähnlich.

Ist nämlich (Fig. 57) $AB : ab = BC : bc = AC : ac$, so ist $\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$, $\angle C = \angle c$ und $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

Man schneide von C nach A ein Stück, nämlich $Cm = ac$ ab und ziehe $mn \parallel AB$, so ist

$$AC : Cm = AB : mn$$
$$AC : ac = AB : mn$$

Ferner ist

$$AC : ac = AB : ab,$$

folglich $mn = ab$

Bedenkt man ferner, daß auch

$$BC : Cn = AB : mn$$
$$BC : bc = AB : ab$$

so ist auch $Cn = bc$

demnach $\triangle Cmn \cong \triangle abc$ und $\angle x = \angle A = \angle a$, $\angle y = \angle B = \angle b$, $\angle C = \angle c$ und $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

§. 160.

Sind zwei Seiten eines Dreiecks proportional zweien Seiten eines anderen, ist ferner der von den proportionalen Seiten eingeschlossene Winkel in einem so groß als im anderen, so sind auch die übrigen zwei Winkel in beiden Dreiecken gleich groß, die dritten Seiten

proportional und die Dreiecke einander ähnlich.

Ist nämlich (Fig. 57) AC : ac, BC : bc und $\angle C = \angle c$, so ist auch $\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$, AC : ac = AB : ab und $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

Schneidet man nämlich von C aus nach A ein Stück Cm = ac und nach B Cn = bc ab und zieht mn, so ist $\triangle Cmn \cong \triangle abc$, folglich $\angle x = \angle a$, $\angle y = \angle b$.

Ist aber Cm = ac, Cn = bc, so ist auch

$$AC : Cm = BC : Cn$$

und $mn \parallel AB$.

Demnach $\angle x = \angle A = \angle a$, $\angle y = \angle B = \angle b$

und $AC : Cm = AB : mn$

oder $AC : ac = AB : ab$

und $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

§. 161.

Sind zwei Seiten eines Dreiecks proportional zweien Seiten eines anderen, die Gegenwinkel der größeren von diesen Seiten aber einander gleich, so sind auch die übrigen Winkel wechselsweise einander gleich, die dritten Seiten proportional und die Dreiecke einander ähnlich.

Ist (Fig. 57) AC : ac = BC : bc, AC > BC, ac > bc und $\angle B = \angle b$, so ist auch $\angle A = \angle a$, $\angle C = \angle c$, AC : ac = AB : ab und $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

Man schneide von C nach A ein Stück Cm = ac von C nach B ein Stück Cn = bc ab, und ziehe mn, so ist

$$AC : Cm = BC : Cn$$

folglich mn || AB.

Aus der Parallelität beider Linien ergibt sich aber, daß $\angle y = \angle B = \angle b$ und $\triangle Cmn \cong \triangle abc$, demnach auch $\angle x = \angle A = \angle a$, $\angle C = \angle c$.

Da ferner $AC : Cm = AB : mn$

so ist auch $AC : ac = AB : ab$

und sonach $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

§. 162.

Zieht man in einem rechtwinkligen Dreiecke aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse eine Senkrechte, so theilt dieselbe das Dreieck in zwei unter sich und dem ganzen Dreiecke ähnliche Dreiecke.

Ist (Fig. 58) ABC ein rechtwinkliges Dreieck und CD eine auf die Hypotenuse AB aus der Spitze des rechten Winkels ACB gezogene Senkrechte, so ist $\triangle ACD \sim \triangle BCD \sim \triangle ABC$.

Denn es ist

1) $\angle A = \angle A$, $\angle ADC = \angle ACB$, folglich $\triangle ACD \sim \triangle ABC$.

2) $\angle B = \angle B$, $\angle BDC = \angle ACB$, sonach $\triangle BCD \sim \triangle ABC$.

Hieraus ergibt sich, daß auch $\angle A = \angle y$ und $\angle B = \angle v$, demnach $\triangle ACD \sim \triangle BCD$.

§. 163.

Ist (Fig. 58) △ ACD ∾ △ BCD, so ist AD : CD = CD : BD.

Demnach ist eine aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gezogene Senkrechte die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse **AD** und **BD**.

§. 164.

Ist △ ADC ∾ △ ABC (Fig. 58), so ist AD : AC = AC : AB.

Eben so ist in den beiden ähnlichen Dreiecken BCD und ABC.

BD : BC = BC : AB.

Zieht man demnach aus der Spitze des rechten Winkels in einem rechtwinkligen Dreiecke eine Senkrechte auf die Hypotenuse, so ist jede Kathete dieses Dreiecks die mittlere Proportionallinie zwischen der ganzen Hypotenuse und dem an der Kathete anliegenden Theil derselben.

§. 165.

Die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten.

Zieht man (Fig. 59) aus den gleichen Winkelspitzen C und c die Senkrechten CD und cd auf die gegenüber stehenden Seiten, so ist △ ACD ∾ △ acd

demnach AB : ab = AC : ac
CD : cd = AC : ac

$AB.CD : ab.cd = AC^2 : ac^2$

$\frac{1}{2}AB.CD : \frac{1}{2}ab.cd = AC^2 : ac^2$

Ist aber, wie sich aus der Aehnlichkeit beider Dreiecke ergibt, $Ac:ac = AB : ab = BC : bc$ so ist natürlich auch $AC^2:ac^2 = AB^2: ab^2 = BC^2:bc^2$ mithin

$$\frac{1}{2} AB.CD : \frac{1}{2} ab.cd = AC^2 : ac^2$$
$$= AB^2 : ab^2$$
$$= BC^2 : bc^2$$

§. 166.

Ein Dreieck zu verzeichnen, welches zweien gegebenen ähnlichen Dreiecken ähnlich, der Summa oder dem Unterschiede derselben aber gleich ist.

§. 167.

Eine gerade Linie **CD** (Fig. 60) so zu theilen, daß die Theile derselben sich wie die einer anderen vorgegebenen geraden Linie **AB** verhalten.

Man errichte über der schon getheilten geraden Linie AB, ein gleichseitiges Dreieck ABC schneide darauf von AE und BE von E aus Stücke ab, welche der zu theilenden gleich sind, verbinde dann die Durchschnittspunkte durch eine gerade Linie, so ist diese der zu theilenden Linie gleich. Zieht man dann von E nach F, G, H gerade Linien, so theilen diese die Linie CD in die verlangten proportionalen Theile.

Denn da $AE : AB = CE : CD$,
so ist, da $AE = AB$, auch $CE = CD$

Da ferner, wie sich leicht erweisen läßt CD || AB, so ist

$$\begin{array}{l} EI : EF = CI : AF \\ EI : EF = IK : FG \\ \hline CI : AF = IK : FG. \end{array}$$

Auf gleiche Weise wird der Beweis für die übrigen Theile KL rc. geführt.

Ist die zu theilende Linie länger, als die schon getheilte, so fallen die Punkte C und D in die Verlängerung der Seiten AE und BE. Der Beweis übrigens ist derselbe.

§. 168.

Um daher eine begränzte gerade Linie in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zu theilen, schneide man von einer noch unbegränzten geraden Linie eine gleiche Anzahl gleicher Theile ab und verfahre dann, wie in voriger Aufgabe gelehrt worden ist.

Hierauf beruht auch die Einrichtung des ergänzten Maßstabes, wovon das Nähere mündlich.

§. 169.

1) Zu drei gegebenen Linien die vierte geometrische Proportionallinie zu finden (Fig. 61).

2) Zu zwei gegebenen geraden Linien AB und BC die dritte geometrische Proportionallinie zu finden (Fig. 62).

§. 170.

1) Ein Parallelogramm in mehrere gleiche oder proportionirte Theile zu theilen.

2) Ein Parallelogramm nach gegebenem Verhältnisse zu vergrößern.

3) Ein Dreieck in mehrere gleiche oder proportionirte Theile zu theilen.

4) Ein Dreieck nach gegebenem Verhältnisse zu vergrößern.

§. 171.

Jede von mehr als drei Seiten eingeschlossene ebene Figur wird ein Vieleck und zwar nach der Anzahl der Seiten ein Viereck, Fünfeck, Sechseck, n-Eck genannt.

Sind alle Seiten eines Vielecks von n Seiten einander gleich und alle Winkel desselben gleich groß, so ist das Vieleck ein reguläres und jeder Winkel $\frac{(n-2)\,2q}{n}$

Da auch die Vierecke unter die Vielecke gehören, so ist klar, wie alle Wahrheiten, die von jedem Vielecke ermittelt werden, auch für die Vierecke ihre volle Gültigkeit haben müssen. Und so erhält die Lehre vom Vierecke durch die Lehre vom Vielecke erst ihre Vollständigkeit.

§. 172.

Sind in Vielecken von gleich vielen Seiten alle Seiten der Ordnung nach und eben so alle Winkel der Ordnung nach als gleich groß bekannt,

1) bis auf zwei Seiten mit ihrem Zwischenwinkel,

2) bis auf eine Seite mit ihren anliegenden Winkeln,

3) bis auf 3 Winkel; sind ferner

4) alle Seiten und Diagonalen der Ordnung nach einander gleich, so sind die Vielecke auch in den noch nicht als gleich bekannten Stücken ebenfalls gleich, mithin kongruent.

Anmerkung. Hier sind Vielecke mit lauter auswärts gehenden Winkeln gemeint.

§. 173.

Vielecke sind einander ähnlich, wenn sie gleich viele Seiten halben, ihre gleichliegenden Seiten proportional, und ihre gleichliegenden Winkel gleich groß sind (Fig. 63).

§. 174.

Indessen hat man, um die Aehnlichkeit zweier Vielecke festzustellen, nicht erst nöthig, die Proportionalität aller gleichliegender Seiten und die gleiche Größe aller gleichliegender Winkel darzuthun, sondern es reicht schon hin, gezeigt zu haben:

1) daß alle gleichliegende Seiten bis auf zwei proportional und alle gleichliegende Winkel gleich groß seyen, bis auf den, welcher von den noch nicht als proportional bekannten Seiten eingeschlossen ist;

2) daß alle gleichliegende Seiten bis auf eine proportional und alle gleichliegende Win-

kel gleich groß seyen, bis auf zwei, welche an der noch nicht als proportional bekannten Seite liegen;

3) daß alle Seiten proportional und alle Winkel gleich sind, bis auf drei;

4) daß alle gleichliegende Seiten und Diagonalen proportional seyen.

Die Wahrheit dieser vier Behauptungen läßt sich, wenn man gleichliegende Diagonalen zieht, leicht nach den von der Aehnlichkeit der Dreiecke aufgestellten Sätzen beweisen.

§. 175.

Alle reguläre Vielecke von gleich viel Seiten sind einander ähnlich.

Aehnliche Vielecke werden durch gleichliegende Diagonalen in lauter ähnliche Dreiecke getheilt.

§. 176.

Den Umfang eines regelmäßigen Vielecks aus einer Seite zu bestimmen.

§. 177.

Den Quadratinhalt eines regulären Vielecks von n Seiten zu bestimmen.

Zieht man vom Mittelpunkte des Vielecks nach allen Winkelpunkten gerade Linien, so entstehen n kongruente Dreiecke. Berechnet man demnach den Quadratinhalt eines solchen Dreiecks und

nimmt denselben n mal, so hat man den Quadratinhalt des n Ecks.

Oder nennt man die Maßzahl der Grundseite jedes dieser kongruenten Dreiecke g, die der Höhe h, so ist der Quadratinhalt des n-Ecks, nämlich $a = \frac{n. g. h}{2} = ng \frac{h}{2}$, woraus sich ergibt, daß man den Quadratinhalt eines Vielecks auch finde, wenn man die Maßzahl seines Umfangs mit der seiner halben Höhe multiplicirt.

§. 178.

Um den Inhalt eines unregelmäßigen Vielecks zu finden, theilt man dasselbe durch Diagonalen in lauter Dreiecke, und berechnet den Inhalt eines jeden Dreiecks für sich. Die Summe der Inhalte aller Dreiecke gibt den Inhalt für das unregelmäßige Vieleck.

§. 179.

Die Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich, wie zwei Paar gleichliegender Seiten oder Diagonalen.

Bezeichnen wir nämlich die Seiten der einen Figur mit A, B, C u. s. die der anderen aber mit a, b, c, so ist wegen der Aehnlichkeit der Figuren

$$A : a = B : b = C : c$$

und $(A + B + C \ldots) : (a + b + c \ldots) = A : a$

$$= B : b$$

$$= C : c,$$

Auf gleiche Weise ist der Beweis für die gleichliegenden Diagonalen zu führen.

§. 180.

Aehnliche Figuren verhalten sich ihrem Flächeninhalte nach, wie die Quadrate gleich liegender Seiten oder Diagonalen.

Theilt man (Fig. 63) beide Vielecke durch gleichliegende Diagonalen im Dreiecke, so ist

$$\triangle ABF : \triangle abf = AB^2 : ab^2$$
$$= AF^2 : af^2$$
$$= BF^2 : bf^2$$
$$\triangle BEF : \triangle bef = BF^2 : bf^2$$
$$= FE^2 : fe^2$$
$$= BE^2 : be^2$$

u. s. f.

Hieraus ergibt sich, daß

$$(\triangle ABF + \triangle BEF \ldots) : \triangle abf : \triangle bef \ldots = AB^2 : ab^2$$
$$= AF^2 : af^2$$
$$= BF^2 : bf^2$$

u. s. f.

§. 181.

Ein Vieleck zu verzeichnen, welches zweien einander ähnlichen Vielecken ähnlich, der Summa oder dem Unterschiede derselben aber gleich ist.

§. 182.

An die Lehre vom Vielecke schließt sich die Lehre vom Kreise.

§. 183.

Was ein Kreis sey, ist schon aus §. 6 be-

kannt. Und hieraus geht hervor, daß Kreise mit gleichen Halb= oder Durchmessern einander vollkommen gleich oder kongruent seyn müssen.

§. 184.

Jeder Durchmesser theilt den Kreis in zwei kongruente Hälften.

Denkt man sich beide Stücke der Kreisfläche auf einander gelegt, so wird sich leicht zeigen lassen, daß dieselben einander in allen Theilen decken, kongruent seyen.

§. 185.

Auf gleiche Weise wird der Beweis für folgenden Satz geführt:

Gleiche, am Mittelpunkte eines Kreises durch seine Halbmesser gebildete Winkel — Mittelpunktswinkel — stehen auf gleich großen Bogenstücken, und Mittelpunktswinkel, welche auf gleich großen Bogenstücken stehen, sind gleich.

§. 186.

Im nämlichen oder gleich großen Kreise gehören demnach gleiche Bögen zu gleichen Sehnen und gleiche Sehnen zu gleichen Bögen.

§. 187.

Ein durch die Mitte einer Sehne gehender Halbmesser halbirt den zur Sehne gehörigen

Bogen und steht auf der Sehne selbst senkrecht (Fig. 65).

§. 188.

Ein auf einer Sehne senkrecht stehender Halbmesser halbirt sowohl die Sehne als ihren Bogen.

§. 189.

Jede durch den Mittelpunkt einer Sehne gehende Senkrechte, geht gehörig verlängert durch den Mittelpunkt des Kreises.

§. 190.

Senkrechte, aus der Mitte zweier Sehnen gezogen, gehen, gehörig verlängert durch den Mittelpunkt des Kreises, woselbst sie sich demnach schneiden müssen.

§. 191.

Aus vorstehenden Sätzen ergibt sich die Lösung nachfolgender Aufgaben:

1) Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises zu finden.

2) Den Mittelpunkt eines Kreises aus einem gegebenen Bogenstücke zu bestimmen.

3) Durch 3 Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, oder durch die Winkelpunkte eines Dreiecks einen Kreis zu ziehen.

§. 192.

Hieraus erklärt sich die Behauptung, daß die Lage und Größe eines Kreises durch drei in seinem Umfange gegebene Punkte bestimmt sey.

§. 193.

Gleichgroße Sehnen des nämlichen Kreises haben gleiche Entfernung vom Mittelpunkte desselben, und Sehnen, welche vom Mittelpunkte des Kreises gleich weit abstehen, sind gleich groß.

Ist (Fig. 66) AB = DE, so ist auch CF = CG.

Denn zieht man AC und BC und CD und CE, so ist △ ACF ≌ △ BCF ≌ △ CDG ≌ △ CEG, demnach CF = CG.

Ist hingegen CF = CG, so ist auch AB = DE. Denn auch unter dieser Voraussetzung sind die erwähnten Dreiecke kongruent, AF = BF = DG = EG und AF + BF = DG + EG oder AB = DE.

§. 194.

Kreise mit ungleichen Halbmessern sind einander ähnlich.

Der Beweis ergibt sich aus §. 175, wenn man den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten ansieht.

§. 195.

1) Einen Kreis zu verzeichnen, welcher

der Summa oder dem Unterschiede zweier gegebenen Kreise gleich ist.

2) Kreise zu verzeichnen, welche 2, 3, 4 ... nmal so groß als ein gegebener sind.

§. 196.

Theilt man die Umfänge zweier Kreise in 360 Theile, und nennt jeden solchen Theil einen Grad, so verhält sich der Umfang des größeren Kreises zum Umfange des kleineren, wie ein Grad des größeren zu einem Grade des kleineren.

§. 197.

Da zwischen den Schenkeln gleich großer Mittelpunktswinkel im nämlichen oder gleichen Kreise gleichgroße, in ähnlichen Kreisen aber proportionale Bögen liegen, so kann jeder Winkel, als Mittelpunktswinkel gedacht, seiner Größe nach durch das Bogenstück bestimmt werden, welches zwischen den Schenkeln des Winkels liegt, oder nach Graden gemessen werden.

§. 198.

Um auch kleinere Theile eines Winkels bestimmen zu können, theilt man jeden Grad in 60 Theile — Minuten — jede Minute in 60 Sekunden 2c.

§. 198.

Die Bezeichnung dieser verschiedenen Winkelmaßabtheilungen ergibt sich, wenn man bedenkt, daß 6° 4′ 8″ in Worten ausgedrückt heiße:

Sechs Grade, vier Minuten, acht Sekunden.

§. 200.

Ein Winkel, welcher den vierten Theil eines Kreises, einen Quadranten zu seinem Maße hat, ist ein rechter, hält also 90°.

§. 201.

Jeder spitze Winkel hält demnach weniger und jeder stumpfe Winkel mehr als 90°.

§. 202.

Alle Winkel, welche um den Mittelpunkt eines Kreises herum liegen, müssen in Summa 360 Grade halten oder 4q gleich seyn.

Anmerkung. Hier dürfte die Einrichtung des Transporteurs zu erklären seyn.

§. 203.

Ein Winkel am Mittelpunkte eines Kreises ist doppelt so groß, als ein auf dem nämlichen Bogen stehender Winkel des Umfangs.

Man unterscheide hier 3 Fälle, je nachdem nämlich der Mittelpunkt in einen Schenkel des Umfangswinkels, oder zwischen die Schenkel, oder über dieselben hinausfällt.

Ist (Fig. 67) $BC = CD$, so ist $\angle x = \angle y$ demnach $\angle z = 2 \angle y$.

In Fig. 68 ist $\angle z = 2 \angle x$, $\angle w = 2 \angle y$, also $\angle z + \angle w = 2 (\angle x + \angle y)$.

In Fig. 69 ist $\angle (z+w) = 2 \angle (x+y)$, $\angle z = 2 \angle x$, folglich $\angle w = 2 \angle y$.

§. 204.

Steht der Winkel am Mittelpunkte zwar

nicht auf dem nämlichen, aber doch gleich großen Bogenstücke als ein Umfangswinkel des nämlichen Kreises, so ist jener ebenfalls doppelt so groß, als dieser.

§. 205.

Ein Umfangswinkel von gleicher Größe mit einem Mittelpunktswinkel, steht auf doppelt so großem Bogen. Um daher die Größe desselben in Graden zu bestimmen, versetzt man ihn in Gedanken an den Mittelpunkt, wo dann seine Schenkel nur ein halb so großes Bogenstück abschneiden würden. Daher der Satz:

Die Hälfte des Bogens, auf welchem der Peripheriewinkel steht, ist das Maß für denselben.

§. 206.

Ein Umfangswinkel, welcher ein rechter seyn soll, steht auf dem Halbkreise.

Jeder Umfangswinkel, dessen Schenkel auf einem größeren Bogen, als auf dem Halbkreise stehen, ist ein stumpfer, im Gegentheile aber ein spitzer Winkel.

§. 207.

Bilden vier Sehnen eines Kreises ein Viereck, so sind je zwei einander gegenüberliegende Winkel desselben in Summa gleich zweien rechten.

§. 200.

Ein Winkel, welcher den vierten Theil eines Kreises, einen Quadranten zu seinem Maße hat, ist ein rechter, hält also 90°.

§. 201.

Jeder spitze Winkel hält demnach weniger und jeder stumpfe Winkel mehr als 90°.

§. 202.

Alle Winkel, welche um den Mittelpunkt eines Kreises herum liegen, müssen in Summa 360 Grade halten oder 4q gleich seyn.

Anmerkung. Hier dürfte die Einrichtung des Transporteurs zu erklären seyn.

§. 203.

Ein Winkel am Mittelpunkte eines Kreises ist doppelt so groß, als ein auf dem nämlichen Bogen stehender Winkel des Umfangs.

Man unterscheide hier 3 Fälle, je nachdem nämlich der Mittelpunkt in einen Schenkel des Umfangswinkels, oder zwischen die Schenkel, oder über dieselben hinausfällt.

Ist (Fig. 67) $BC = CD$, so ist $\angle x = \angle y$ demnach $\angle z = 2 \angle y$.

In Fig. 68 ist $\angle z = 2 \angle x$, $\angle w = 2 \angle y$, also $\angle z + \angle w = 2 (\angle x + \angle y)$.

In Fig. 69 ist $\angle (z+w) = 2 \angle (x+y)$, $\angle z = 2 \angle x$, folglich $\angle w = 2 \angle y$.

§. 204.

Steht der Winkel am Mittelpunkte zwar

nicht auf dem nämlichen, aber doch gleich großen Bogenstücke als ein Umfangswinkel des nämlichen Kreises, so ist jener ebenfalls doppelt so groß, als dieser.

§. 205.

Ein Umfangswinkel von gleicher Größe mit einem Mittelpunktswinkel, steht auf doppelt so großem Bogen. Um daher die Größe desselben in Graden zu bestimmen, versetzt man ihn in Gedanken an den Mittelpunkt, wo dann seine Schenkel nur ein halb so großes Bogenstück abschneiden würden. Daher der Satz:

Die Hälfte des Bogens, auf welchem der Peripheriewinkel steht, ist das Maß für denselben.

§. 206.

Ein Umfangswinkel, welcher ein rechter seyn soll, steht auf dem Halbkreise.

Jeder Umfangswinkel, dessen Schenkel auf einem größeren Bogen, als auf dem Halbkreise stehen, ist ein stumpfer, im Gegentheile aber ein spitzer Winkel.

§. 207.

Bilden vier Sehnen eines Kreises ein Viereck, so sind je zwei einander gegenüberliegende Winkel desselben in Summa gleich zweien rechten.

§. 200.

Ein Winkel, welcher den vierten Theil eines Kreises, einen Quadranten zu seinem Maße hat, ist ein rechter, hält also 90°.

§. 201.

Jeder spitze Winkel hält demnach weniger und jeder stumpfe Winkel mehr als 90°.

§. 202.

Alle Winkel, welche um den Mittelpunkt eines Kreises herum liegen, müssen in Summa 360 Grade halten oder 4q gleich seyn.

Anmerkung. Hier dürfte die Einrichtung des Transporteurs zu erklären seyn.

§. 203.

Ein Winkel am Mittelpunkte eines Kreises ist doppelt so groß, als ein auf dem nämlichen Bogen stehender Winkel des Umfangs.

Man unterscheide hier 3 Fälle, je nachdem nämlich der Mittelpunkt in einen Schenkel des Umfangswinkels, oder zwischen die Schenkel, oder über dieselben hinausfällt.

Ist (Fig. 67) $BC = CD$, so ist $\angle x = \angle y$ demnach $\angle z = 2 \angle y$.

In Fig. 68 ist $\angle z = 2 \angle x$, $\angle w = 2 \angle y$, also $\angle z + \angle w = 2 (\angle x + \angle y)$.

In Fig. 69 ist $\angle (z + w) = 2 \angle (x + y)$, $\angle z = 2 \angle x$, folglich $\angle w = 2 \angle y$.

§. 204.

Steht der Winkel am Mittelpunkte zwar

nicht auf dem nämlichen, aber doch gleich großen Bogenstücke als ein Umfangswinkel des nämlichen Kreises, so ist jener ebenfalls doppelt so groß, als dieser.

§. 205.

Ein Umfangswinkel von gleicher Größe mit einem Mittelpunktswinkel, steht auf doppelt so großem Bogen. Um daher die Größe desselben in Graden zu bestimmen, versetzt man ihn in Gedanken an den Mittelpunkt, wo dann seine Schenkel nur ein halb so großes Bogenstück abschneiden würden. Daher der Satz:

Die Hälfte des Bogens, auf welchem der Peripheriewinkel steht, ist das Maß für denselben.

§. 206.

Ein Umfangswinkel, welcher ein rechter seyn soll, steht auf dem Halbkreise.

Jeder Umfangswinkel, dessen Schenkel auf einem größeren Bogen, als auf dem Halbkreise stehen, ist ein stumpfer, im Gegentheile aber ein spitzer Winkel.

§. 207.

Bilden vier Sehnen eines Kreises ein Viereck, so sind je zwei einander gegenüberliegende Winkel desselben in Summa gleich zweien rechten.

§. 208.

Schneiden zwei Sehnen eines Kreises einander innerhalb des Kreises, so stehen die abgeschnittenen Stücke der einen Sehne im umgekehrten Verhältnisse zu den abgeschnittenen Stücken der anderen.

Schneiden sich nämlich (Fig. 70) AB und CD in E und verbindet man B und C und ebenso A und D durch gerade Linien, so ist $\triangle$ ADE $\sim$ $\triangle$ BCE und deßhalb AE : DE = CE : BE.

§. 209.

Hieraus ergiebt sich, daß AE . BE = DE . CE, oder daß das Rechteck aus den Abschnitten der einen Sehne gleich dem Rechtecke aus den Abschnitten der anderen Sehne.

§. 210.

Ist die eine Sehne ein Durchmesser und steht die andere senkrecht auf demselben, so wird die letztere halbirt und es ergibt sich, daß die Hälfte derselben, die mittlere geometrische Proportionale zwischen den abgeschnittenen Stücken des Durchmessers sey (Fig. 71).

Hienach läßt sich auf ganz einfache Weise eine mittlere geometrische Proportionallinie ziehen, oder was dasselbe sagen will, ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat verwandeln.

§. 211.

1) Ein schiefwinkliges Parallelogramm in ein Quadrat zu verwandeln.

2) Ein beliebiges Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln.

3) Ein Parallelotrapez in ein Quadrat zu verwandeln.

4) Jedes beliebige Viereck in ein Quadrat zu verwandeln.

6) Ein Quadrat zu verzeichnen, welches sich zu einem gegebenen Quadrate verhält, wie zwei vorgegebene Linien oder deren Maßzahlen m : n.

6) Ein Vieleck zu verzeichnen, welches einem vorgegebenen ähnlich und sich zu ihm, wie zwei gegebene Linien oder ihre Maßzahlen m und n verhalten.

§. 212.

Jede Figur, deren Winkelpunkte in den Umfang eines Kreises fallen und deren Seiten Sehnen des Kreises sind, werden eingeschriebene, der Kreis selbst aber ein unbeschriebener genannt.

§. 213.

Sind alle Seiten und Winkel einer eingeschriebenen Figur gleich, so wird die Figur eine eingeschriebene regelmäßige, im Gegentheile aber eine eingeschriebene unregelmäßige genannt.

§. 214.

Bilden drei Sehnen eines Kreises ein Dreieck, so ist das Dreieck ein eingeschriebenes.

Demnach ist die Aufgabe leicht zu lösen: Ein eingeschriebenes Dreieck zu verzeichnen.

§. 215.

Soll das eingeschriebene Dreieck ein regelmäßiges werden, so ist nöthig, erst ein eingeschriebenes regelmäßiges Sechseck verzeichnen zu können. Daher hievon später.

§. 216.

Ein beliebiges Vieleck von n Seiten im Kreise zu beschreiben, ziehe man n Sehnen, welche eine geschlossene Figur bilden.

§. 217.

Soll das einzuschreibende Viereck ein Quadrat werden, so ziehe man zwei senkrecht auf einander stehende Durchmesser und verbinde ihre Endpunkte durch gerade Linien.

Daß alle Winkel dieses so entstandenen Vierecks rechte und alle Seiten gleich groß seyen, wird sich leicht aus dem Vorangegangenen darthun lassen.

§. 218.

Die Seite eines regelmäßigen in den Kreis beschriebenen Sechsecks ist dem Halbmesser des Kreises gleich.

Denn zieht man vom Mittelpunkte des umschrie-

benen Kreises nach allen Winkelpunkten des Sechsecks Halbmesser, so entstehen 6 kongruente Dreiecke, von denen jeder am Mittelpunkte sich vorfindende Winkel $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ halten muß. Die Summa der beiden übrigen Winkel beträgt demnach 120° und jeder desselben, da sie wegen Gleichheit der Halbmesser einander ebenfalls gleich seyn müssen, 60°.

Es sind demnach alle Winkel der 6 durch erwähnte Konstruktion entstandenen Dreiecke einander gleich, mithin jede Seite des Sechsecks dem Halbmesser gleich.

Hiernach läßt sich leicht die Aufgabe lösen:

Ein regelmäßiges Sechseck in einen Kreis zu beschreiben.

§. 219.

Verbindet man je zwei Punkte eines regelmäßigen in den Kreis beschriebenen Sechsecks, mit Uebergehung eines dritten, durch gerade Linien, so entsteht ein regelmäßiges in den Kreis beschriebenes Dreieck ACE (Fig. 64).

Der Beweis ergibt sich aus der Kongruenz der Dreiecke ABC, CDE, AFE.

§. 220.

Will man ein regelmäßiges Vieleck von n Seiten in einen vorgegebenen Kreis verzeichnen, so berechne man, wie große Winkel am Mittelpunkte entstehen, wenn man von demselben nach allen Winkelpunkten des eingeschriebenen Vielecks gerade

Linien zieht, nämlich $\frac{360°}{n}$, verbinde darauf mittelst des Transporteurs zwei Halbmesser unter dem gefundenen Winkel, so wird dieser Winkel um den Mittelpunkt herum sich gerade n mal zeichnen lassen und jede Sehne desselben eine Seite des verlangten Vielecks bilden.

Demnach darf die einmal gefundene Sehne nur n mal im Kreise herumgetragen werden.

§. 221.

Die Winkelpunkte eines regulären Vielecks liegen alle im Umfange des Kreises, in welchem drei derselben liegen.

Durch die 3 Punkte A, B und C (Fig. 64) läßt sich ein Kreis ziehen, dessen Mittelpunkt G heißen möge. Verbindet man nun A, B und C durch gerade Linien mit G, so ist AG = BG = CG und △ ABG ≌ △ BCG, demnach ∠ y = ∠ v = ∠ w. Da aber ∠ ABC = ∠ BCD, so ist auch ∠ z = ∠ w = ∠ v, sonach auch △ BCG ≌ △ CDG und DG = CG = BG = AG.

Hiernach ist klar, daß auch der Punkt D in die Peripherie des Kreises fallen müsse.

Auf gleiche Weise wird der Beweis für alle folgende Punkte geliefert.

§. 222.

Der Mittelpunkt eines regulären Vielecks fällt demnach mit dem Mittelpunkte eines Kreises zusammen, welcher um das Vieleck gezogen worden ist.

§. 223.

Jede Seite des regulären Vielecks bildet eine Sehne des um dasselbe beschriebenen Kreises. Der Mittelpunkt des regulären Vielecks wird demnach auf dieselbe Weise gefunden, wie der des Kreises, indem man nämlich aus der Mitte zweier Seiten Senkrechte errichtet, welche einander im Mittelpunkte schneiden.

§. 224.

Ein reguläres Vieleck von n Seiten über einer vorgegebenen Grundlinie zu beschreiben.

Man berechne den Vieleckswinkel, setze an die gegebene Linie eine zweite, gleich große, unter dem gefundenen Winkel und ziehe dann einen Kreis, in welchem der Winkelpunkt sowohl, als die beiden Endpunkte beider Schenkel zu liegen kommen, so läßt sich die gegebene Seite n mal im Kreise herumtragen.

Denn es ist dann jede Seite die Sehne eines Mittelpunktswinkels von $\frac{360°}{n}$, die sich nothwendig n mal im Kreise herumtragen läßt.

§. 226.

Eine zweite Art der Auflösung ist folgende.

Man trägt an die beiden Endpunkte der vorgegebenen Seite die Hälfte des Vieleckswinkels, verlängert beide neu angesetzte Winkelschenkel, bis sie sich schneiden und zieht dann vom Durchschnittspunkte aus einen Kreis, in welchen beide Winkel-

punkte fallen, so läßt sich in diesem Kreise die gegebene Seite gerade n mal als Sehne herumtragen.

Daß beide an die Endpunkte angesetzten Winkelschenkel sich schneiden, ergibt sich aus folgender Betrachtung:

Aus dem Mittelpunkte eines jeden regelmäßigen n-Ecks lassen sich nach allen Winkelpunkten n gleiche Seiten ziehen, welche jeden n-Eckswinkel halbiren. Sollten nun die für den halben Winkel angesetzten Schenkel nicht ebenfalls und zwar im Mittelpunkte einander schneiden, so gäbe es gleich große Winkel, welche mit ihrem Winkelpunkt und einem Schenkel auf einander gelegt in ihrem andern Schenkel aus einander fielen, was dem § 26 widerspricht. Im Uibrigen gilt dieselbe Beweisführung, wie sie für die erste Auflösung gegeben ist.

§. 225.

1) Ein reguläres Vieleck in ein gleichgroßes Dreieck zu verwandeln.

2) Ein reguläres Vieleck in ein Quadrat zu verwandeln.

3) Ein gleichseitiges Dreieck zu verzeichnen, welches halb so groß, als ein gegebenes reguläres Sechseck.

4) Einen Rhombus zu verzeichnen, welcher der dritte Theil eines vorgegebenen regulären Sechseckes ist.

5) Ein reguläres Sechseck in einen gleichgroßen Rhombus zu verwandeln.

§. 226.

Die Umfänge ähnlicher regelmäßiger Viel- ecke verhalten sich, wie die Halb- oder Durch- messer der umschriebenen Kreise.

Es ist (Fig. 64) P : p = AB : ab, wobei P und p die Umfänge beider Vielecke ausdrückt. — Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke ist aber auch AB : ab = AG : ag = 2AG : 2ag = AD : ad, so- nach P : p = AD : ad.

§. 227.

Berührt jede Seite eines Vielecks einen im Vielecke verzeichneten Kreis nur in einem Punkte, ist eine Tangente, so wird das Vieleck ein um- schriebenes, der Kreis aber ein einge- schriebener genannt.

§. 228.

Ein reguläres Vieleck von gegebener An- zahl Seiten um einen Kreis zu beschreiben.

Man beschreibe zuerst ein Vieleck von gleich viel Seiten in den Kreis, darauf errichte man vom Mittelpunkte desselben aus nach allen Seiten Senk- rechte und verlängere dieselben, bis sie den Umfang des Kreises treffen. Durch diese Durchschnitts- punkte ziehe man dann Parallelen zu den Seiten des Vielecks im Kreise und verlängere dieselben, bis sie die verlängerten Halbmesser, welche durch die Winkelpunkte des eingeschriebenen Vielecks ge- hen, treffen.

§. 229.

Einen Kreis in ein Dreieck zu beschreiben (Fig. 72).

§. 230.

Ein um ein gleichseitiges Dreieck umschriebener Kreis hat einen doppelt so großen Halbmesser, als ein in dasselbe eingeschriebener.

Es wird sich leicht zeigen lassen, daß (Fig. 73) △ ADE ein gleichseitiges, daß AF senkrecht auf DE und daß deßhalb DF = EF und DF + EF = 2DF seyn müsse.

§. 231.

Aus der Seite eines regulären Vielecks die Seite eines regulären Vielecks von doppelt so vielen Seiten zu bestimmen.

Ist (Fig. 65) AB = a die Seite des gegebenen Vielecks, so ziehe man durch die Mitte von AB die Linie GH, und es ist AH die Seite des verlangten Vielecks.

Nun ist $GI^2 = AG^2 - AI^2$

$GI^2 = r^2 - \frac{1}{4}a^2$

$GI = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}$

Ferner ist $HI = r - GI = r - \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)}$

demnach $AH^2 = \frac{1}{4}a^2 + r^2 - 2\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}a^2)} + r^2 - \frac{1}{4}a^2$

$= 2r^2 - 2\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2}$

$AH = \sqrt{(2r^2 - 2\sqrt{[r^2 - \frac{1}{4}a^2]})}$.

Ist nun AB = a die Seite eines Sechsecks,

so ist AH die Seite eines Zwölfecks und somit wenn $r = 1$, $AH = \sqrt{(2 - 2\sqrt{\tfrac{3}{4}})}$.

Aus der Seite des Zwölfecks läßt sich nun leicht die Seite des 24ecks, 48ecks, 96ecks u. s. w. bestimmen.

Wegen Aehnlichkeit des umschriebenen und eingeschriebenen Vielecks wird es leicht seyn, auch die Seite des umschriebenen Vielecks zu bestimmen.

§. 232.

Je mehr Seiten nun ein eingeschriebenes Vieleck sowohl, als ein umschriebenes hat, desto kleiner werden die Seiten und desto mehr nahen sich die Vielecke selbst dem Kreise.

Wenn nun schon die Sehne stets kleiner ist, als ihr Bogen, so kann doch durch Verdoppelung der Seiten des Vielecks dieser Unterschied so unbedeutend gemacht werden, daß wenn man noch dazu den Kreis als das arithmetische Mittel zwischen einem eingeschriebenen und umschriebenen Vielecke von sehr vielen Seiten ansieht, der Unterschied unbestimmbar klein wird.

Eingeschriebene Vielecke sowohl, als umschriebene von unendlich vielen Seiten müssen mit dem Umfange des Kreises zusammenfallen.

§. 233.

Die Kreisumfänge verhalten sich, wie ihre Halb- oder Durchmesser (s. §. 226).

§. 234.

Setzt man den Durchmesser eines Kreises gleich 1, so ist nach Archimed der Umfang eines einge-

schriebenen 96-ecks $= 3\frac{10}{71}$ und der Umfang eines umschriebenen 96ecks bei gleichem Durchmesser $3\frac{10}{70} = 3\frac{1}{7}$.

Will man nun das Verhältniß des Durchmessers zum Umfang in ganzen und recht kleinen Zahlen ausdrücken, so wähle man das größere Verhältniß und man erhält $d : p = 7 : 22$.

Genauer und zwar in ganzen Zahlen am genauesten hat Adrian Metius dieses Verhältniß wie 113 : 355 bestimmt.

Auch hiermit noch nicht zufrieden, bestimmte Ludolph von Ceulen, Professor der Mathematik zu Leyden, dieses Verhältniß, wie folgt:
$d : p = 1 : 3{,}14159265358970323846264338327950$.

Jetzt ist dieses Verhältniß bis auf 156 Dezimalstellen berechnet.

§. 235.

Das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie ist aber, wie die gründlichsten Untersuchungen gelehrt haben, ein irrationales.

Wer demnach ein rationales Verhältniß zwischen ihnen aufzufinden sich bestrebt, gibt sich vergebliche Mühe.

Fragt man aber, warum man die Auffindung dieses rationalen Verhältnisses die Quadratur des Zirkels nenne, so ist die Antwort, weil nur dann der Quadratinhalt eines Kreises in aller Schärfe gefunden werden kann, wenn ein rationales Verhältniß zwischen Durchmesser und Umfang besteht.

Indessen ist das bereits oben erwähnte, wenn schon irrationale Verhältniß, von solcher Schärfe, daß selbst bei Kreisen, deren Durchmesser Siocus-

weiten beträgt, um keine merkbare Größe gefehlt werden kann, ja daß dieses Verhältniß in solcher Schärfe nie zur Anwendung gebracht zu werden braucht.

In der Regel reichen zur Bestimmung irdischer Kreise zwei Decimalen dieses Verhältnisses, welches man gewöhnlich der Kürze wegen mit π bezeichnet und Ludolphsche Zahl heißt, hin.

Demnach ist $d : p = 1 : \pi$.

$$p = d\pi.$$

$$\frac{p}{\pi} = d.$$

§. 236.

Man findet eines Kreises Umfang, wenn man seinen Durchmesser mit der Ludolphischen multiplicirt.

Soll hingegen der Durchmesser des Kreises aus seinem Umfange gefunden werden, so dividire man den Umfang durch die Ludolphische Zahl.

§. 237.

Um die Größe eines Bogenstückes von n Graden zu bestimmen, bedenke man, daß der ganze Umfang 360° halte, woraus sich dann leicht folgende Proportion ergibt:

$$360^\circ : n^\circ = d\pi : x$$

$$180^\circ : n^\circ = r.\pi : x$$

$$\frac{nr\pi}{180} = x.$$

§. 238.

Ist hingegen die Länge des Bogenstücks eine bekannte, so läßt sich daraus, wenn r oder d bestimmt sind, die Anzahl seiner Grade oder ist diese bekannt, r oder d finden.

§. 239.

Ist die Quadratfläche eines Kreises F, sein Durchmesser D, sein Halbmesser R, sein Umfang P, so ist, wenn man den Kreis als Vieleck von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten betrachtet.

$$F = \tfrac{1}{4} D.\ P.$$
$$= \tfrac{1}{4} D^2 \pi$$
$$= R^2 \pi.$$

§. 240.

Bezeichnen wir die gleichbenannten Stücke eines anderen Kreises mit denselben, aber kleinen Buchstaben des Alphabets, so ist:

$$F : f = \tfrac{1}{4} D^2 \pi : \tfrac{1}{4} d^2 \pi$$
$$= D^2 : d^2$$
$$= R^2 \pi : r^2 \pi$$
$$= R^2 : r^2.$$

Demnach verhalten sich die Kreisflächen zu einander, wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmesser.

§. 241.

Einen Kreis zu verzeichnen, welcher zweien oder mehreren gegebenen Kreisen gleich ist.

§. 242.

Die Fläche eines Kreises verhält sich zum Quadrate ihres Durchmessers, wie

$$\tfrac{1}{4}\,D^2\,\pi : D^2$$
$$\tfrac{1}{4}\,\pi : 1.$$

§. 243.

Dasjenige Flächenstück eines Kreises, welches von zwei Halbmessern und einem Bogenstücke des Kreises begränzt wird, heißt Kreisausschnitt — Sektor — (Fig. 65).

§. 244.

Einen Kreisausschnitt seinem Quadratinhalte nach zu bestimmen.

Man berechne zuerst den Quadratinhalt des ganzen Kreises und nehme von dem so gefundenen Inhalte desselben den so vielsten Theil, als das Bogenstück, wozu der Ausschnitt gehört, vom Umfange des Kreises ist.

Bezeichnet demnach a den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes, n° die Anzahl der Grade seines Bogens, so ist

$$\tfrac{1}{4}\,D^2\,\pi : a = 360^\circ : n^\circ$$

$$a = \frac{\tfrac{1}{4}\,D^2\,\pi \times n}{360} = $$

$$= \frac{r^2\,\pi\,.\,n}{360}$$

§ 245.

Dasjenige Flächenstück eines Kreises, welches

von einer Sehne und ihrem zugehörigen Bogen begränzt wird, heißt Kreisabschnitt (Segment).

§. 246.

Der Quadratinhalt eines Kreisabschnittes ergibt sich, wenn man vom Quadratinhalt eines Kreisausschnittes von gleichem Bogenstücke den Inhalt des Dreiecks abzieht, welches von der Sehne und den beiden Halbmessern des Ausschnittes sich bilden läßt.

§. 247.

Den Quadratinhalt einer Fläche, welche von zwei konzentrischen Kreisen begränzt wird, findet man, wenn man vom Quadratinhalt des größern Kreises den des kleineren abzieht.

Anhang.

Parallelentheorie des Euklid.

1.

Parallel sind jene gerade Linien, welche, wenn sie auch noch so weit verlängert werden, einander niemals schneiden.

2.

Werden zwei gerade, in Einer Ebene liegende, Linien von einer dritten so geschnitten, daß die inneren an Einer Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel kleiner sind, als zwei rechte so werden diese Linien, genugsam verlängert, einander schneiden.

3.

Werden zwei in Einer Ebene liegende gerade Linien von einer dritten so geschnitten, daß 1) die Wechselwinkel einander gleich, 2)

der äußere gleich seinem an der nämlichen Seite der schneidenden Linie liegenden inneren, und daß 3) die beiden inneren, an derselben Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel in Summa gleich sind zweien rechten, so sind die geschnittenen Linien Parallelen.

Ist sonach (Fig. 35) 1) $\angle x = y$, so ist $AB \parallel CD$.

Denn wäre AB nicht parallel zu CD, so müßten beide gerade Linien, gehörig verlängert, nach einer Seite, etwa nach der Seite BD hin, einander schneiden, wodurch ein Dreieck entstünde, in welchem $\angle o > \angle y$; da aber $\angle o = \angle x$, so wäre nothwendig auch $\angle x > \angle y$.

Ist 2) $\angle o = \angle y$, so ist $AB \parallel CD$.

Denn da $\angle o = \angle x$, so ist auch $\angle x = \angle y$ und $AB \parallel CD$.

Ist 3) $\angle v + \angle y = 2\,q$, so ist $AB \parallel CD$.

Denn ist $\angle v + \angle y = 2q$, so ist, da auch $\angle x + \angle v = 2\,q$ ist, $\angle x = \angle y$ und sonach $AB \parallel CD$.

4.

Werden zwei geradlinige Parallelen von einer dritten geraden Linie geschnitten, so sind 1) die Wechselwinkel einander gleich; 2) der äußere gleich seinem an der nämlichen Seite der schneidenden Linie liegenden inneren; 3) sind die inneren, an der nämlichen Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel gleich 2q.

Ist (Fig. 35) AB || CD, so ist $\angle x = \angle y$.

Denn wäre $\angle x$ nicht gleich dem $\angle y$, so müßte einer von beiden größer seyn, als der andere. Gesetzt $\angle x$ wäre größer als $\angle y$, so wäre $\angle x + \angle v > \angle y + \angle v$, und da $\angle x + \angle v = 2\,q$, so sind $2\,q > \angle y + \angle v$, oder

$$\angle y + \angle v < 2\,q,$$ woraus

hervorginge, daß AB und AD nicht parallel wären, sondern gehörig verlängert, einander schnitten.

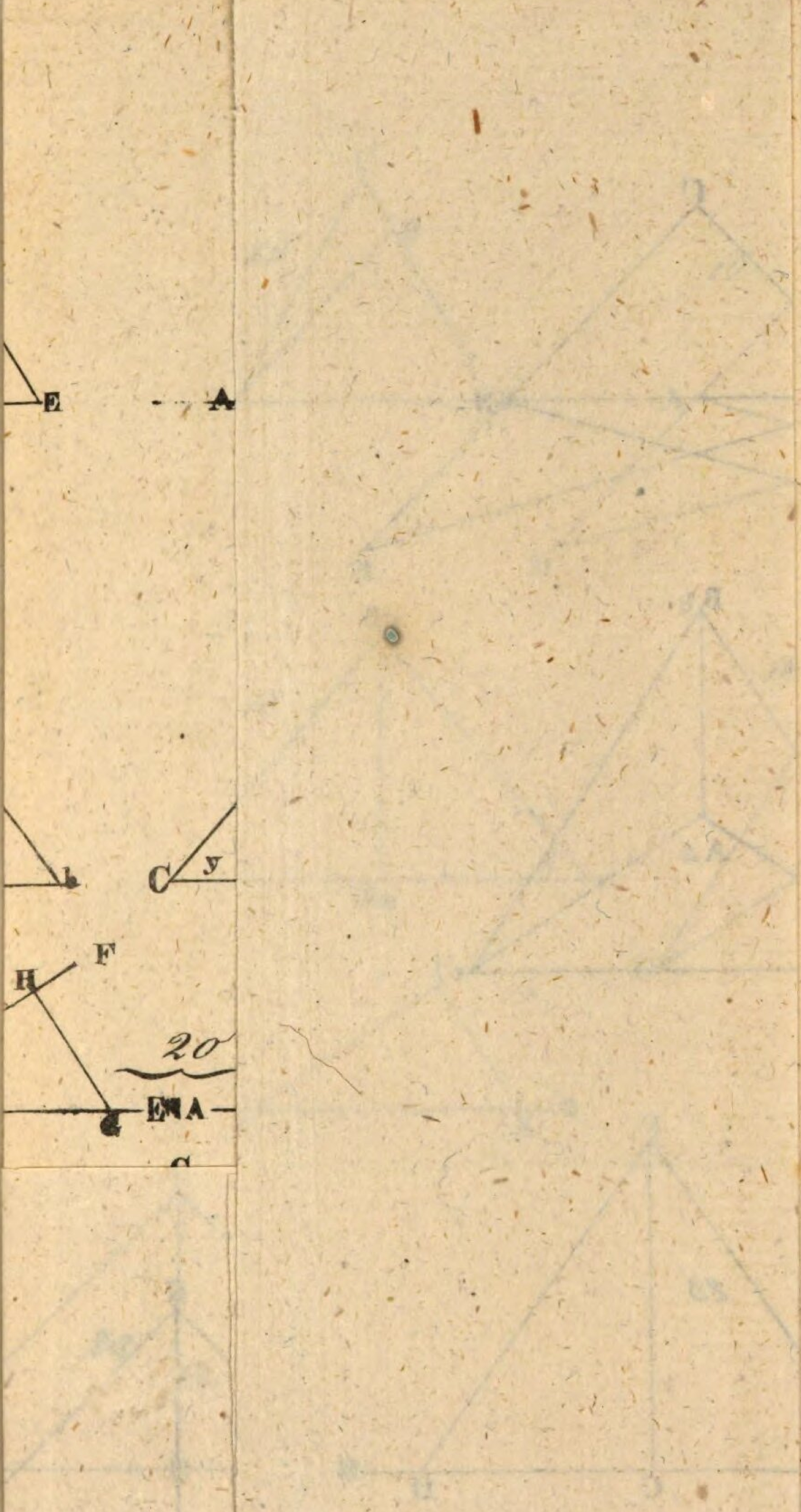
Ist AB || CD, so ist $\angle o = \angle y$.

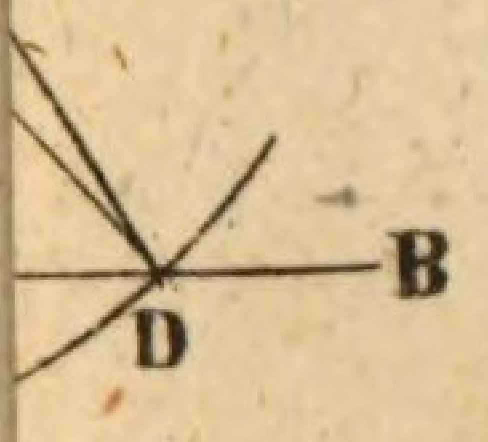
Denn da $\angle x = \angle y$, $\angle x = \angle o$, so ist nothwendig auch $\angle o = \angle y$.

Ist AB || CD, so ist $\angle v + \angle v = 2\,q$.

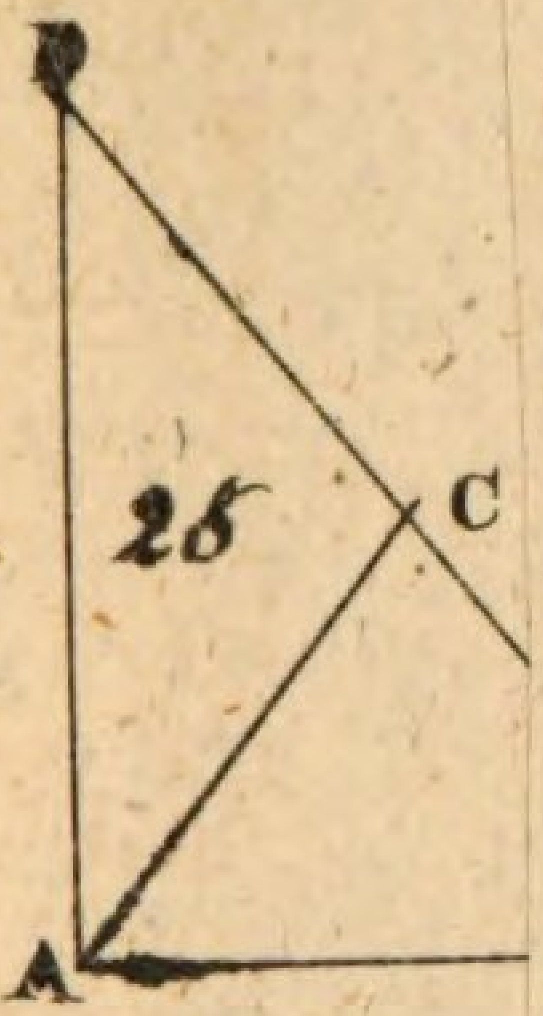
Denn da $\angle x = \angle y$, $\angle x + \angle y = 2q$, so ist auch $\angle y + \angle v = 2\,q$.

D
A
D

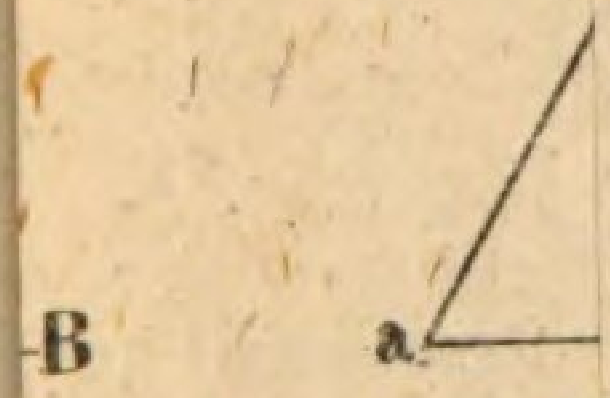

E
A
b
C
y
H
F
20
E A
G
C



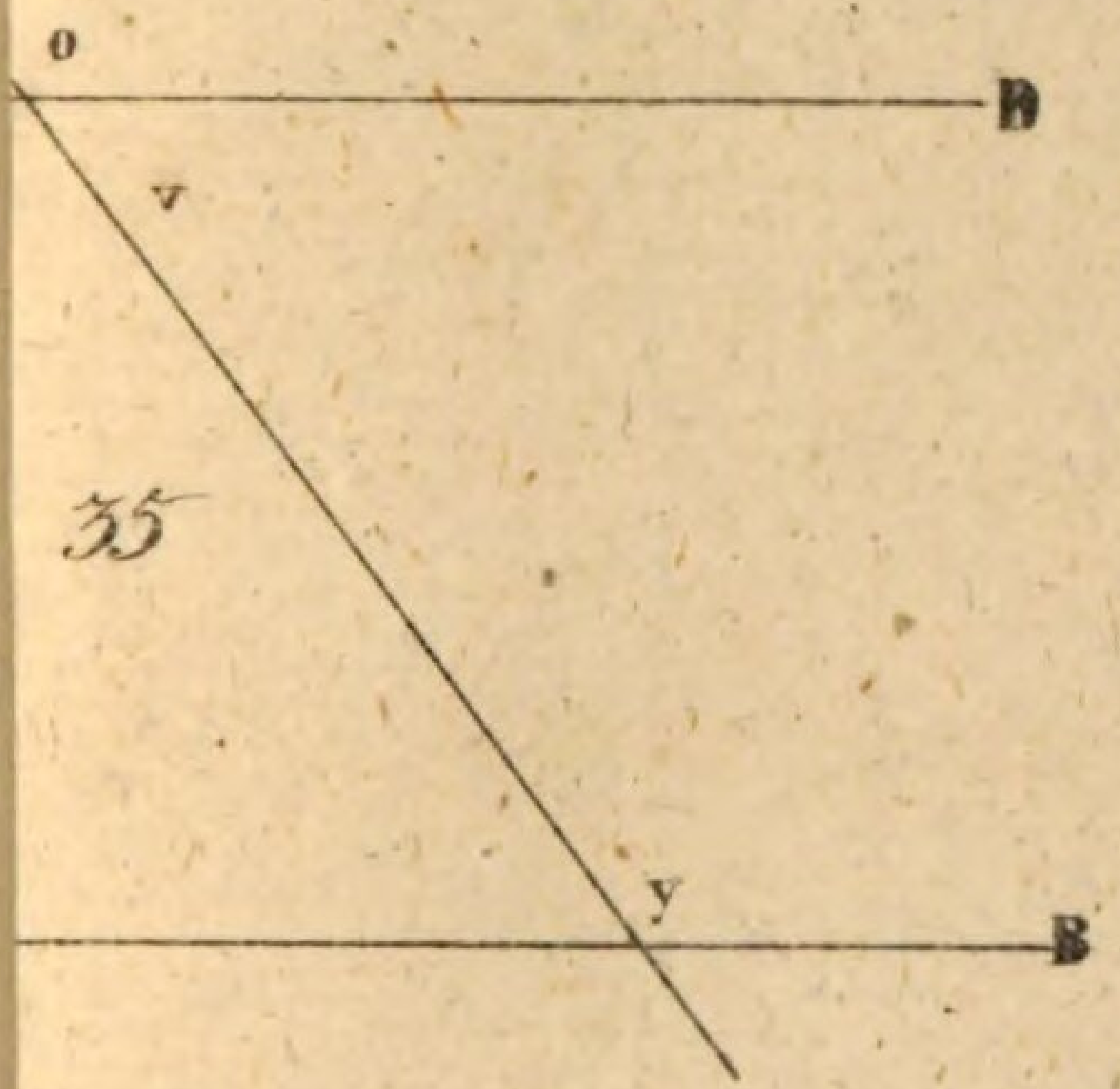
28

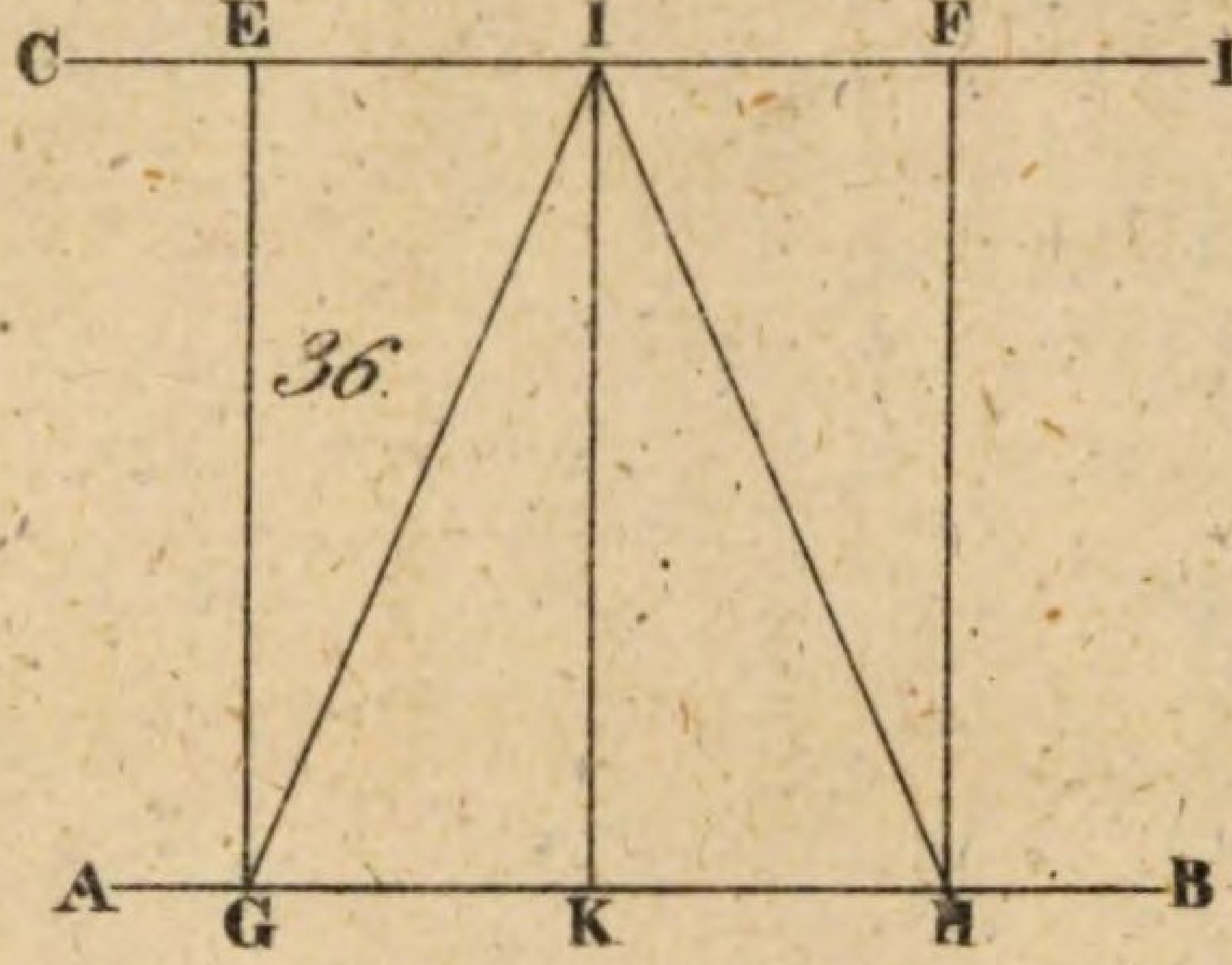


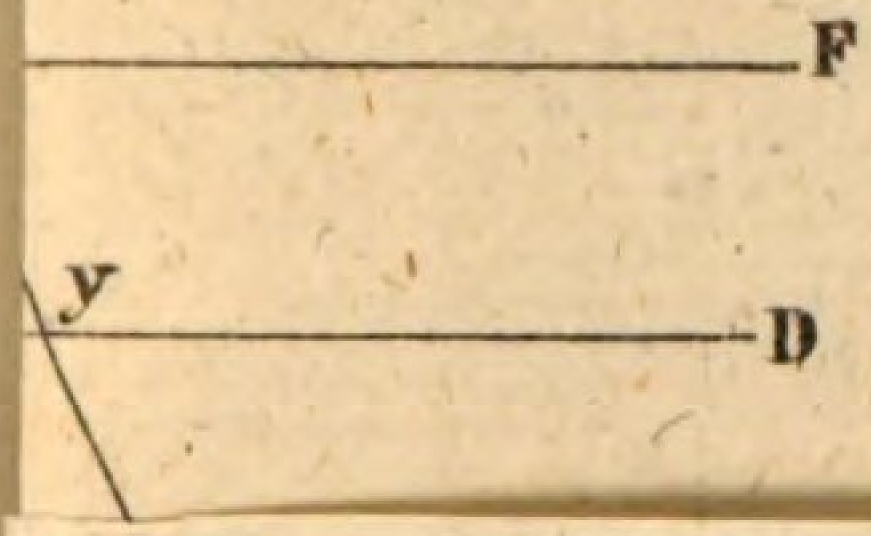
30

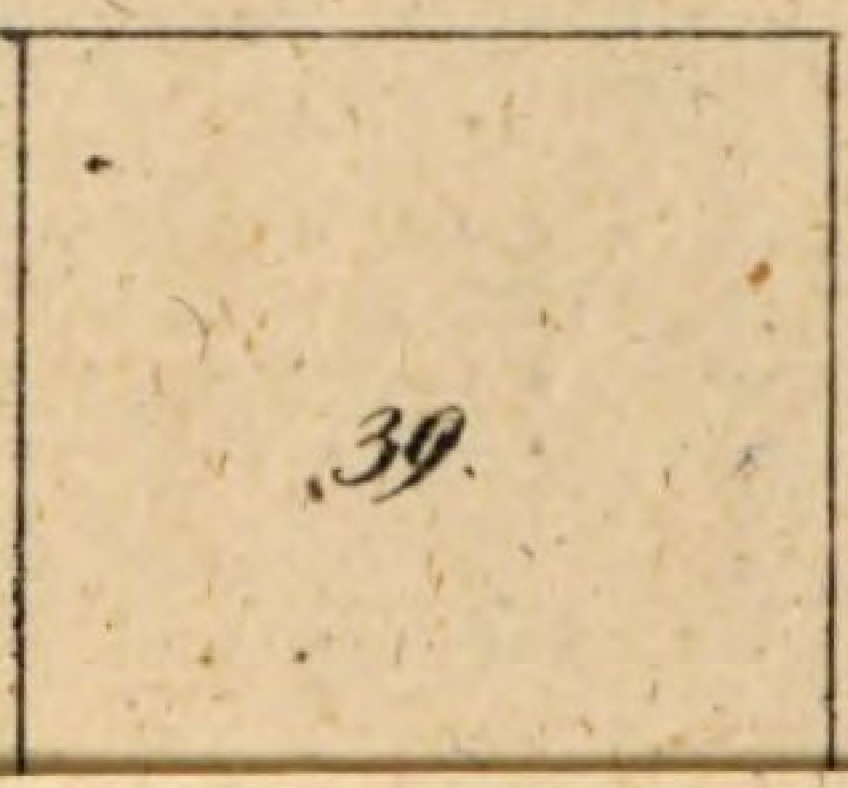


33

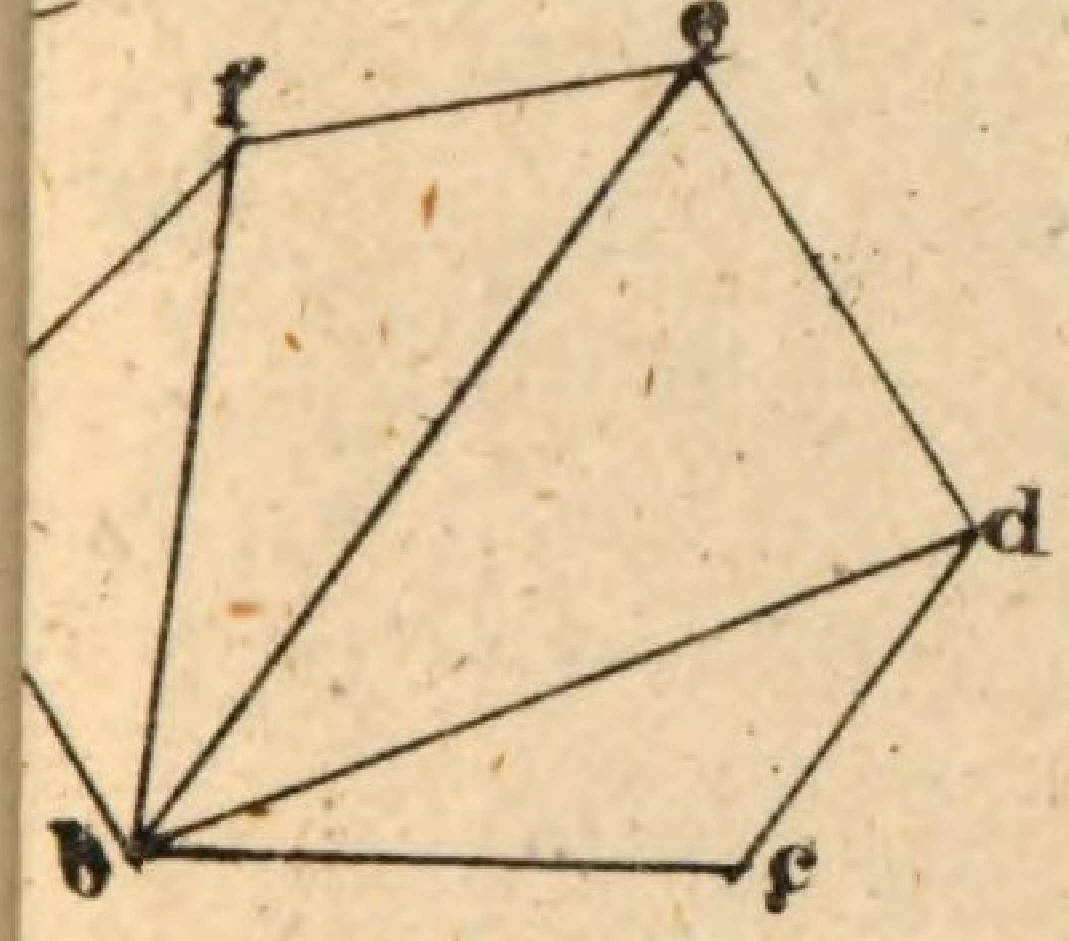

o
D
v
35
y
B

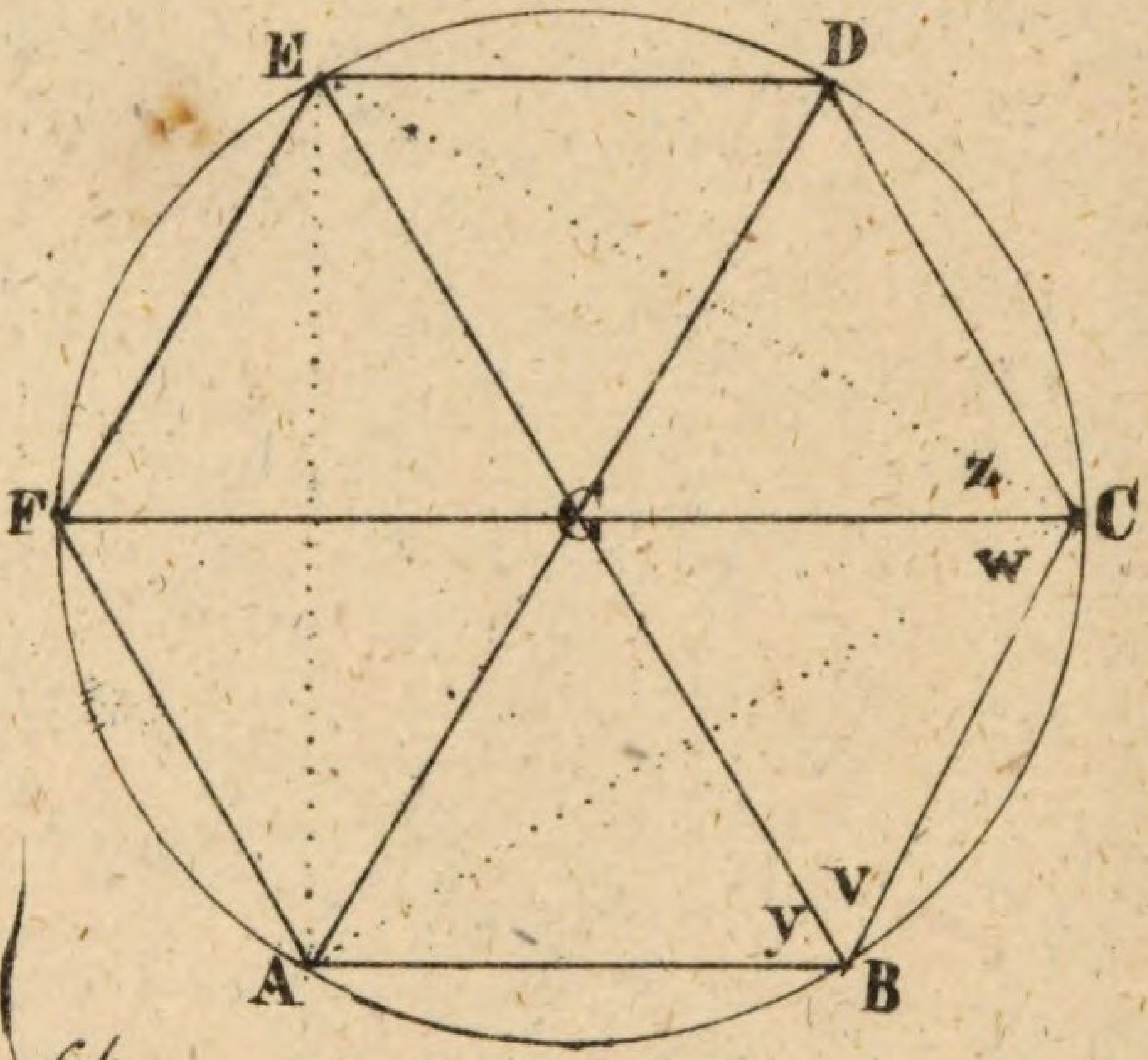

C
E
I
F
D
36.
A
G
K
H
B


F
y
D

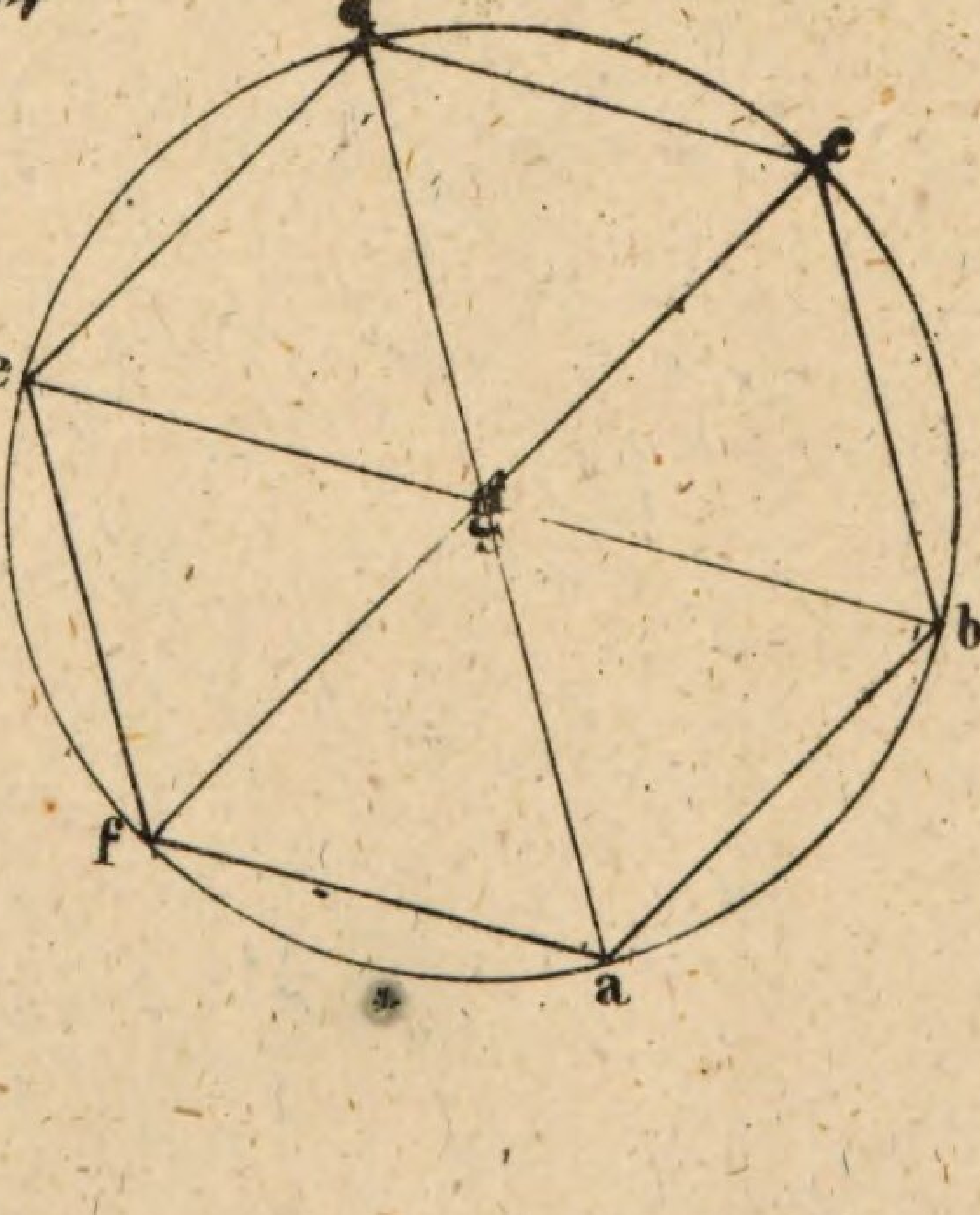

39.

A

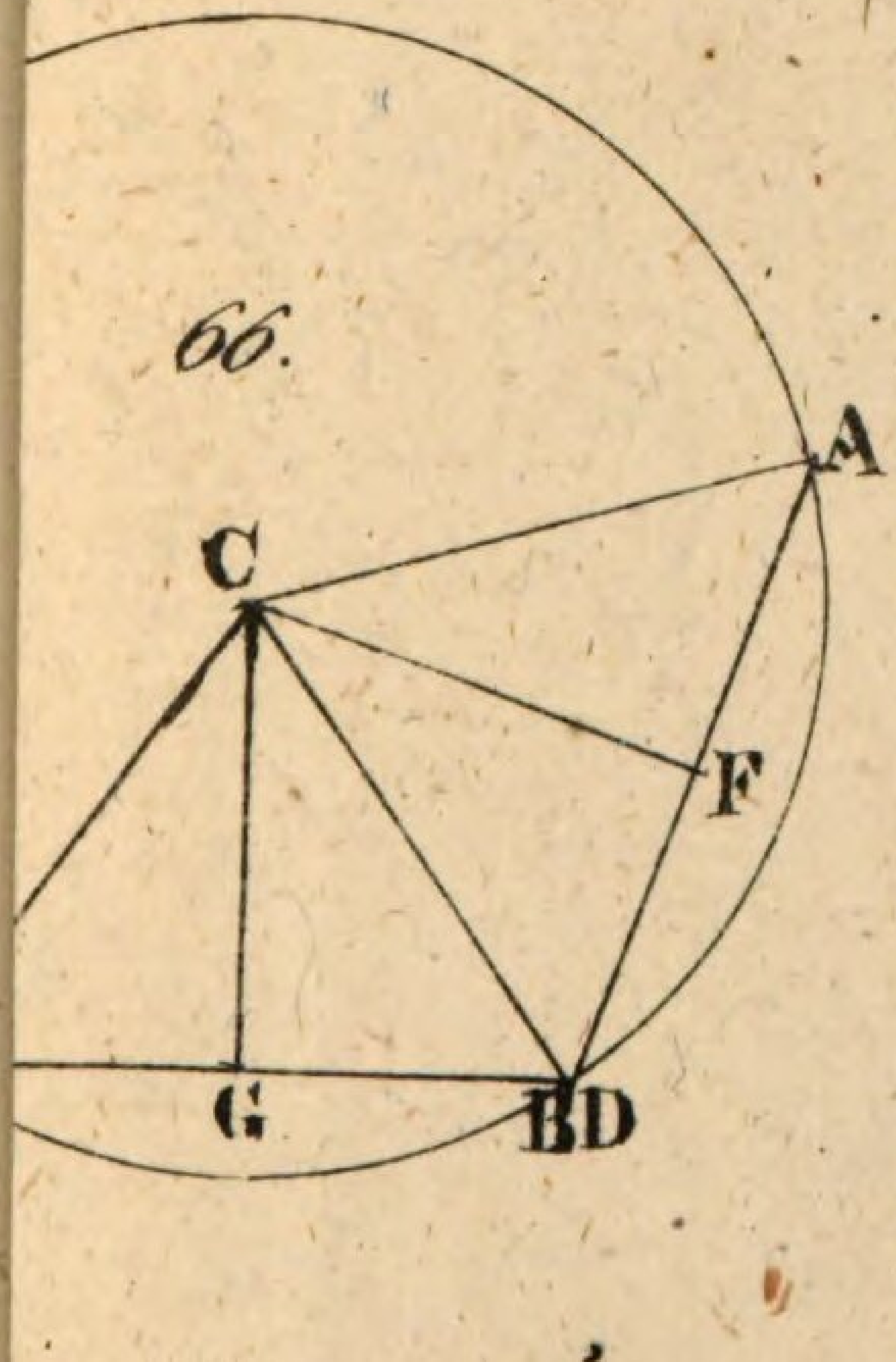


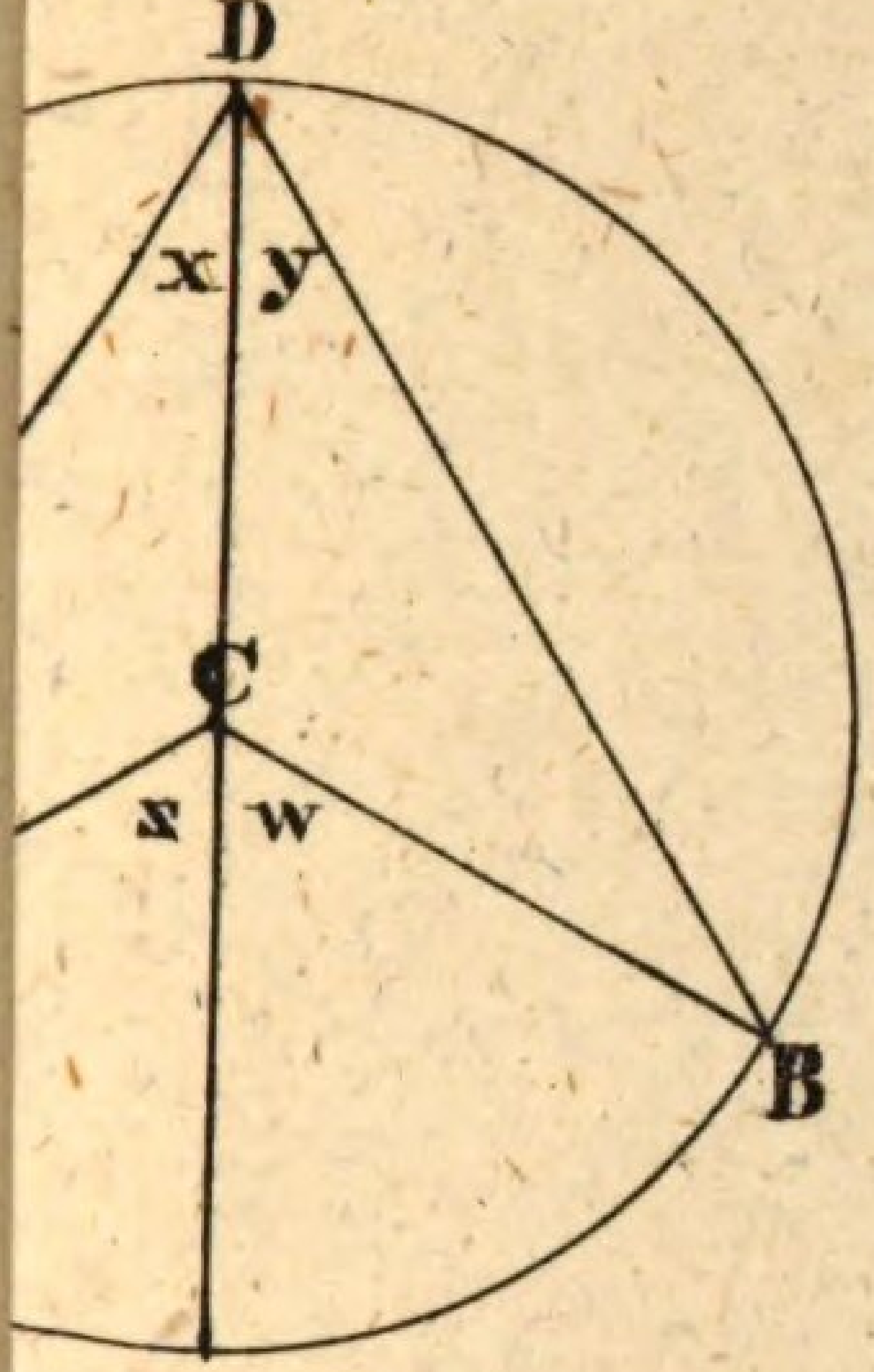


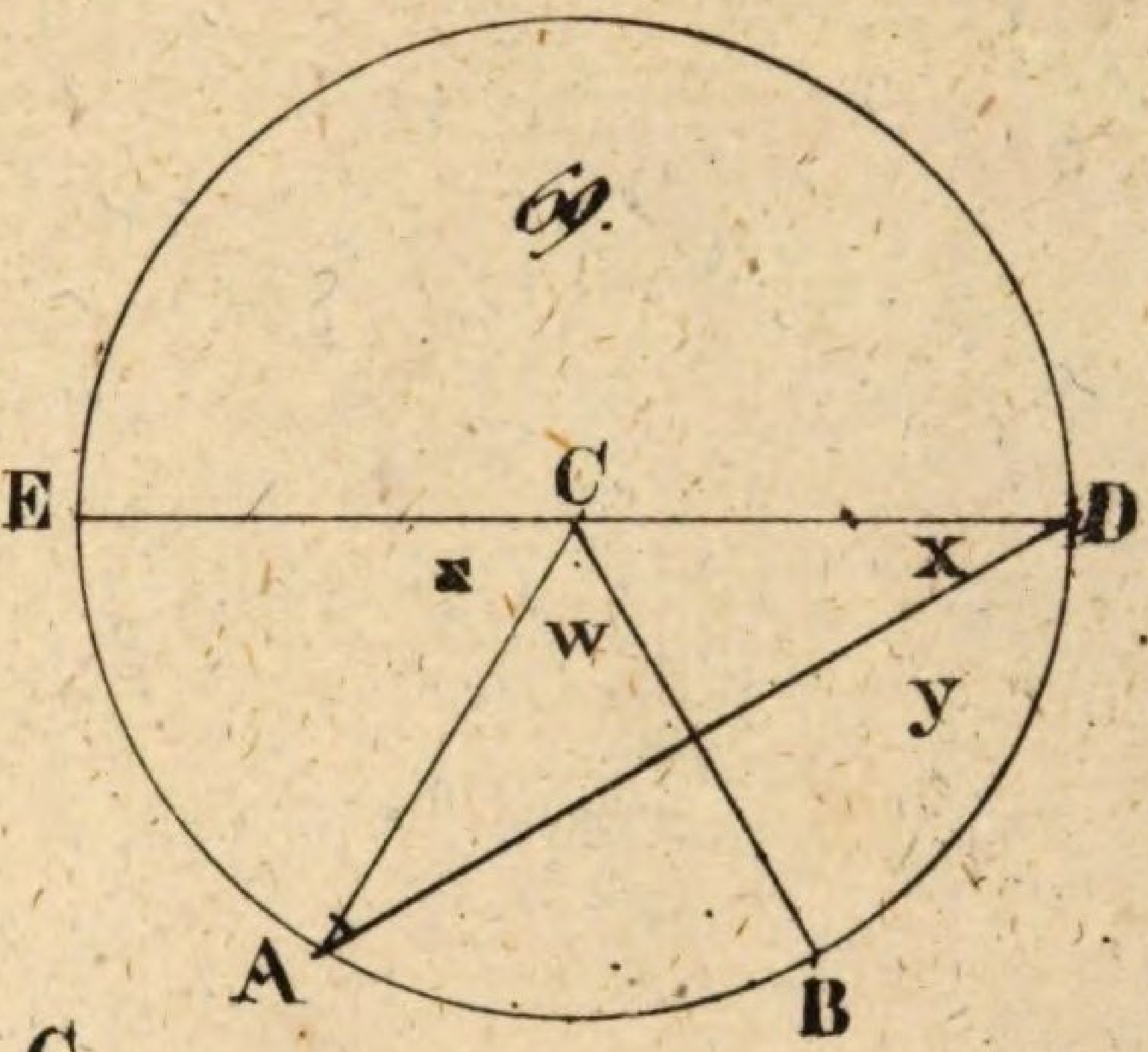
64



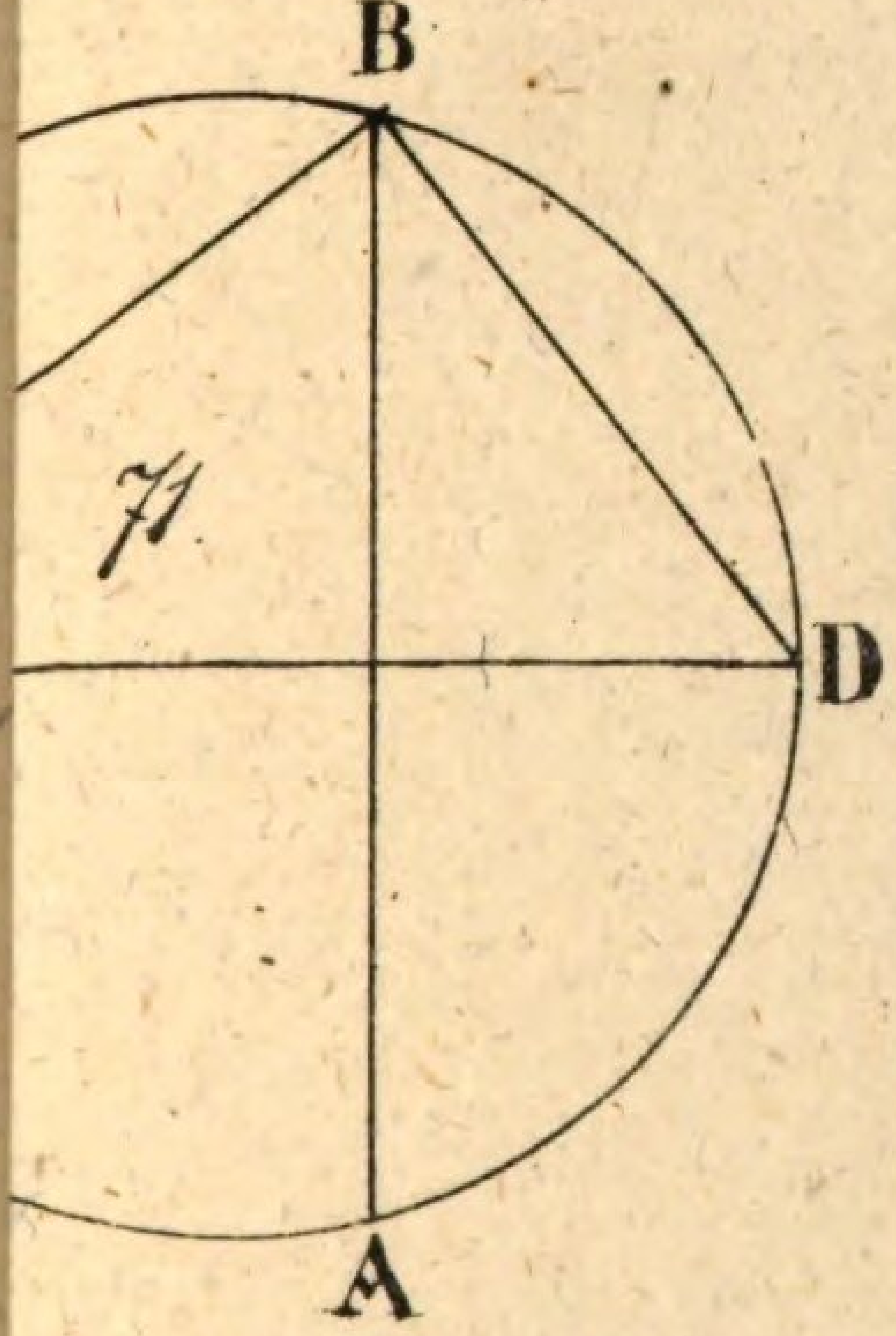
66.



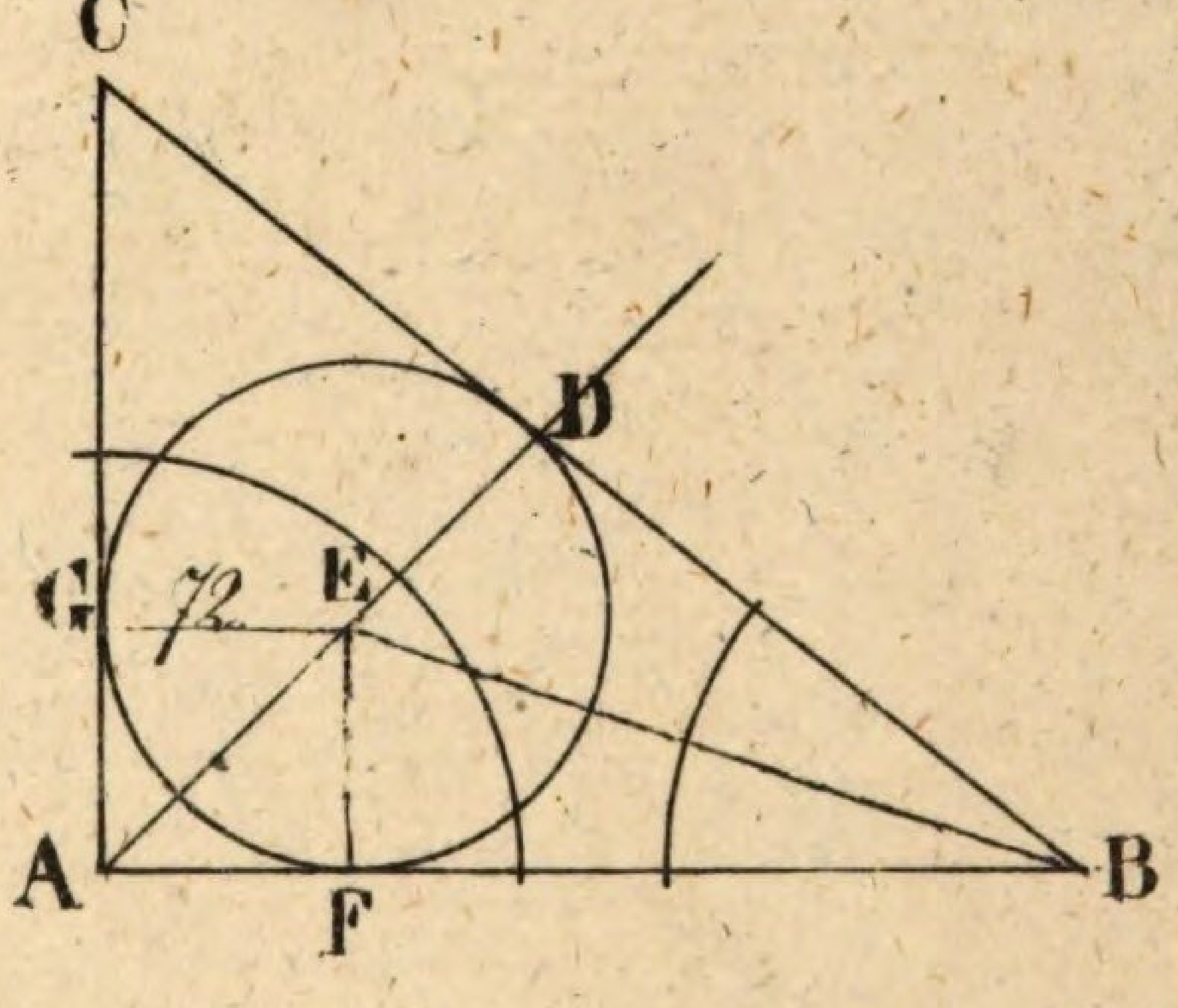




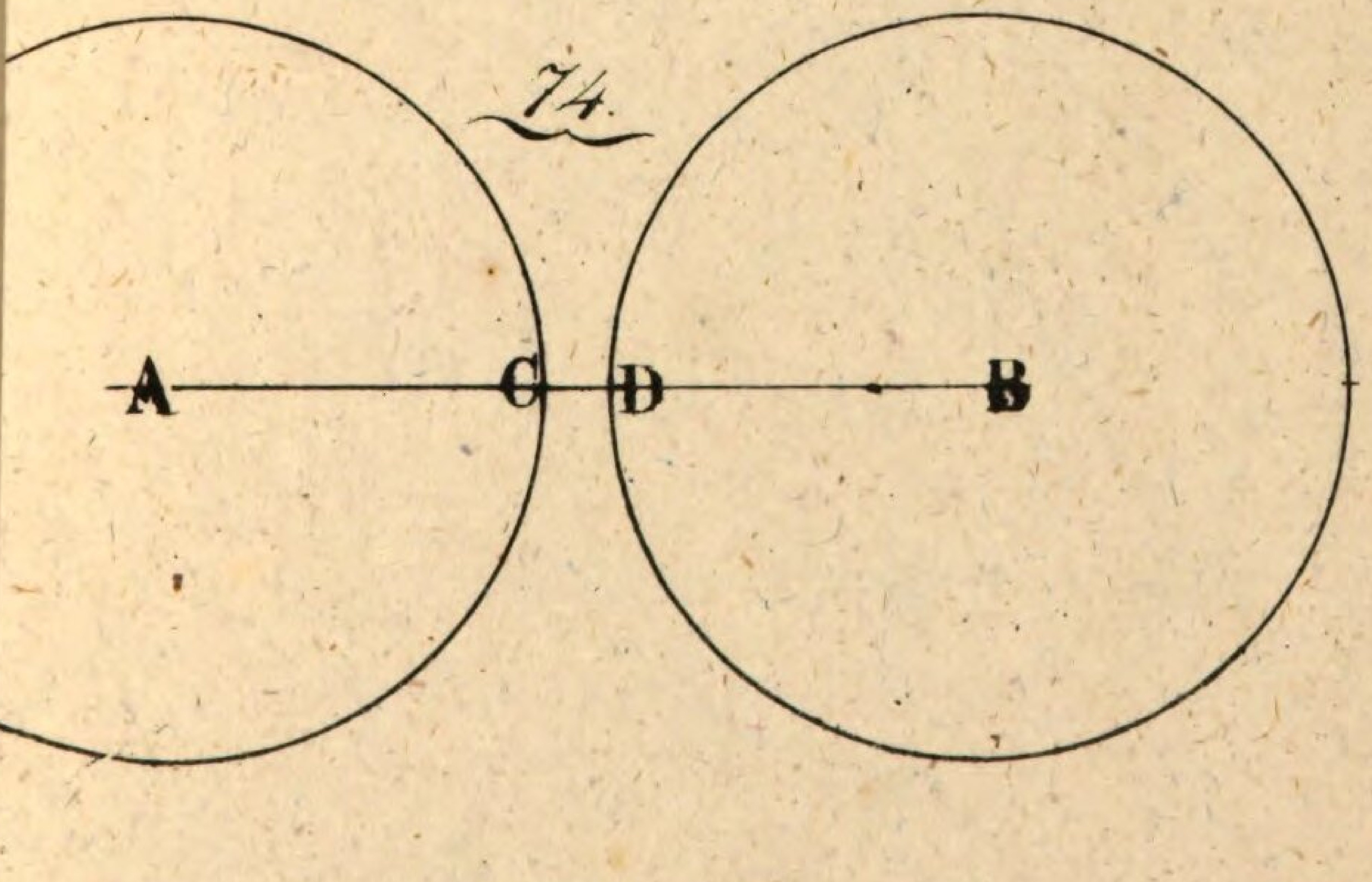
69.



71.



72.



74.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hennig, Karl Friedrich

Grundriß der Geometrie Für Forstschulen und technische Gymnasien bearbeitet

Bd.: 1. Elementare, ebene Geometrie. Mit 8 Steindrucktafeln. - 1838. - XVIII, 91 S. : 8 Ill.

Ansbach 1838

Math.p. 217 g-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081972-4